Ein allgemeines Modell zur Analyse und Bewertung von Guaranteed Minimum Benefits in Fondspolicen

Daniel Bauer, Alexander Kling, Jochen Ruß

Ulm, 17.02.2006

Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften

Institut für Finanz- und
Aktuarwissenschaften
Helmholtzstr. 22
89081 Ulm

Telefon +49 (0) 731-50-31230
Fax +49 (0) 731-50-31239
Email ifa@ifa-ulm.de
Internet www.ifa-ulm.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

Lebens- und Rentenversicherungsprodukte waren und sind ein wichtiger Bestandteil der Altersvorsorge in Deutschland. Für den langfristigen Vermögensaufbau sind die Rendite/Risiko-Profile der Kapitalanlage derartiger Produkte von entscheidender Bedeutung. In der Vergangenheit war die Produktlandschaft in dieser Hinsicht aus Kundensicht sehr übersichtlich: Einerseits gab es klassische Produkte mit einem Garantiezins und einer im Zeitverlauf sehr stabilen Überschussbeteiligung. Andererseits gab es fondsgebundene Produkte ohne Garantien und mit potenziell stärkeren Wertschwankungen dafür mit der Chance auf im langfristigen Durchschnitt höhere Renditen.
Die anhaltende Niedrigzinsphase führte zu einer starken Reduktion der Überschüsse konventioneller Produkte, sodass diese an Attraktivität verloren haben. Andererseits hat die schlechte Börsenentwicklung der Jahre 2000 bis 2003 die Risikobereitschaft vieler Kunden nachhaltig beeinflusst, was den Absatz von fondsgebundenen Produkten erschwerte. Daher konnten sich in jüngerer Vergangenheit neue Produkte etablieren, die sich zwischen konventionellen und fondsgebundenen Produkten positionieren: Zum einen wurden so genannte Hybridprodukte eingeführt, bei denen die garantierte Leistung geringer ist als bei rein konventionellen Produkten. In der Regel beträgt sie gerade die Beitragssumme. Deswegen muss nur ein Teil des Sparbeitrags konventionell angelegt werden. Der Rest des Sparbeitrags kann in Fonds investiert werden und an den Chancen der Kapitalmärkte partizipieren. Zum anderen entwickelten Banken und Investmentgesellschaften Garantiefonds, die im Rahmen von fondsgebundenen Produkten angeboten werden können, wodurch nun auch reine Fondspolicen gewisse Garantien aufweisen.
Verschiedene Entwicklungen deuten jedoch darauf hin, dass die in diesen Bereichen derzeit angebotenen Produkte an Attraktivität verlieren werden: Die geplante weitere Senkung des Rechnungszinses zum 1.1.2007 wird dazu führen, dass bei bisher üblichen Kostenstrukturen die garantierte Ablaufleistung von konventionellen Produkten für manche Kombinationen aus Eintrittsalter und Laufzeit unter oder nur knapp über der Beitragssumme liegt. Hybridprodukte sind in diesen Fällen nicht mehr oder nur mit extrem geringer Fondsanlage möglich. Darüber hinaus stellen die weiterhin auf historischen Tiefstand befindlichen Kapitalmarktzinsen für Garantiefonds ein Problem dar. Insbesondere bei dynamisch abgesicherten Konzepten (z.B. mittels CPPI[1]) ist dadurch das so genannte Monetarisierungsrisiko, also das Risiko, dass ein Garantiefonds komplett in Rentenpapiere umschichten muss, extrem hoch.
Vor dem Hintergrund des großen Erfolges von Produkten, die Garantien mit Aktieninvestments verbinden, ist jedoch davon auszugehen, dass Produktanbieter versuchen werden, neue Konzepte zu entwickeln, die in diesem Umfeld bestehen können.
Zum einen arbeiten derzeit mehrere Banken an statisch abgesicherten (optionsbasierten) Garantiefonds, die im Rahmen von fondsgebundenen

[1] Vgl. z.B. Perold (1986).

Versicherungen gegen laufende Beiträge angeboten werden können. Damit kann das Monetarisierungsrisiko ausgeschaltet werden.
Zum anderen werden Versicherer selbst nach Möglichkeiten suchen, Garantien effizienter abzusichern. In den USA gibt es bereits eine Vielzahl von fondsgebundenen Produkten mit vom Versicherer (selbst oder mit externer Hilfe) abgesicherten Garantien. Diese werden derzeit sowohl in der akademischen Literatur (vgl. Milevsky und Posner (2001), Milevsky und Salisbury (2004)) als auch unter Praktikern (vgl. JPMorgan (2004), Müller (2004), Lehman Brothers (2005)) verstärkt diskutiert. Auffällig ist dabei, dass die angebotenen Garantien teilweise sehr komplex sind. Ferner wird immer wieder behauptet, dass diese Garantien zu einem unangemessenen Preis angeboten werden[2] oder nicht angemessen abgesichert sind. So kommt eine Studie von Lehman Brothers (2005) zu dem Schluss, dass bei einem Anbieter in einem worst case Szenario nur rund ein Drittel der aus den Garantieoptionen resultierenden Verpflichtungen abgesichert sind.
Die vorliegende Arbeit befasst sich mit derartigen Garantien in US-amerikanischen Fondspolicen. Diese Fondspolicen sind in der Regel aufgeschobene Rentenversicherungen gegen Einmalbeitrag mit Kapitalwahlrecht und werden als „Variable Annuities" bezeichnet.[3] Die Garantien werden als *Guaranteed Minimum Benefits* bezeichnet. Je nach Art der Garantie wird zwischen *Guaranteed Minimum Death Benefits* (garantierte Todesfallleistungen, GMDB) und *Guaranteed Minimum Living Benefits* (garantierte Erlebensfallleistungen oder garantierte Mindestentnahmen während der Laufzeit, GMLB) unterschieden.

1.2 Aufbau der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit stellen wir ein allgemeines Modell zur Bewertung aller derzeit im Rahmen von Variable Annuities in den USA angebotenen Garantien vor. Zunächst beschreiben wir in Abschnitt 2 die wichtigsten Formen solcher Garantie-Optionen sowie typische Ausgestaltungsvarianten und nennen die Preise, zu denen diese angeboten werden.
Wir entwickeln dann in Abschnitt 3 ein allgemeines Modell, in welchem diese Garantien konsistent bewertet werden können. In Abschnitt 3.1 stellen wir zunächst unser Modell für den Finanzmarkt vor. In Abschnitt 3.2 beschreiben wir dann unseren Ansatz zu Modellierung von Versicherungsverträgen mit Guaranteed Minimum Benefits und führen insbesondere die benötigten Bezeichnungen ein. Abschnitt 3.3 erläutert die Entwicklung von Versicherungsverträgen im Zeitverlauf abhängig von der Entwicklung des zu Grunde liegenden Fonds und von eventuellen Aktionen des Kunden. Abschnitt 3.4 ist schließlich der Bewertung von Verträgen gewidmet. Wir betrachten hierbei aus didaktischen Gründen zunächst den Wert eines Vertrages unter der Annahme deterministischen Kundenverhaltens. Hierunter verstehen wir den Fall, bei dem schon bei Vertragsabschluss bekannt ist, ob und zu welchen Zeitpunkten der Kunde Entnahmen aus seinem Guthaben vornimmt oder storniert. Danach betrachten wir den Wert des Vertrags unter probabilistischem Kundenverhalten, bei dem für die oben

[2] Milevsky und Posner (2001) stellen fest, dass die Gebühren, die für garantierte Mindesttodesfallleistungen erhoben werden, zu hoch sind. Milevsky und Salisbury (2004) analysieren eine Form von garantierten Mindestentnahmen und bemerken, dass die entsprechenden Gebühren zu niedrig sind.
[3] Man beachte, dass der Begriff „Variable Annuities" im Folgenden Rentenversicherungen mit einer fondsgebundenen Ansparphase bezeichnen und nicht wie in Deutschland üblich (vgl. Mutschler und Ruß (2001)) Rentenversicherungen mit einer fondsgebundenen Auszahlphase.

genannten Ereignisse Eintrittswahrscheinlichkeiten bekannt sind. Schließlich bewerten wir die Verträge unter stochastischem Kundenverhalten. Hierbei lassen wir zu, dass der Kunde zu jedem Zeitpunkt abhängig von den dann vorhandenen Informationen entscheidet, ob er Entnahmen aus seinem Guthaben vornimmt oder storniert. Damit lässt sich insbesondere ein so genanntes finanzrationales Kundenverhalten[4] modellieren. Wir veranschaulichen unseren Bewertungsansatz anhand eines einfachen Beispiels in Abschnitt 3.5.

Auf Grund der Komplexität der betrachteten Garantien ist die Lösung der in Abschnitt 3.4 hergeleiteten Bewertungsformeln im Allgemeinen nur mit numerischen Verfahren möglich. Diese werden in Abschnitt 4 ausführlich erläutert. Neben einem Monte-Carlo Ansatz, der in vielen Spezialfällen effizient (d.h. mit geringer Rechenzeit) genaue Ergebnisse liefert, stellen wir noch einen Diskretisierungsansatz vor, der in allen Fällen, insbesondere auch unter der Annahme finanzrationalen Kundenverhaltens, angewendet werden kann. Wir leiten hierzu zunächst eine quasi-analytische Lösung für das Bewertungsproblem her und zeigen dann, wie das entsprechende Integral mit numerischen Methoden approximiert werden kann. Hierzu verallgemeinern wir einen Ansatz aus Tanskanen und Lukkarinen (2004). In Abschnitt 5 werden die Ergebnisse der Bewertung für eine Reihe üblicher Produktdesigns vorgestellt und ausführlich erörtert. Wir analysieren hier auch die Abhängigkeit der Lösungen von verschiedenen Modellparametern. Abschnitt 6 schließt mit einer kurzen Zusammenfassung und einem Ausblick, der insbesondere auch auf Herausforderungen bei einer Umsetzung derartiger Produkte in Deutschland eingeht.

1.3 Literaturüberblick

Die Idee, fondsgebundene Versicherungen mit gewissen Garantien auszustatten, wurde bereits seit den späten 60er Jahren des 20. Jahrhunderts diskutiert, vgl. Turner (1969) und Turner (1971). Bahnbrechende Arbeiten von Brennan und Schwarz (1976, 1979a und 1979b) übertrugen die Erkenntnisse der damals noch jungen Optionspreistheorie auf derartige Produkte. Insbesondere wurde gezeigt, dass eine geschlossene Formel für den fairen Preis von Erlebensfallgarantien bei einfachen Einmalbeitragspolicen auf die Preisformel einer Call-Option zurückgeführt werden kann. Eine Reihe von Arbeiten baut hierauf auf. Exemplarisch seinen Bacinello und Ortu (1993) genannt, die verschiedene Arten endogender Garantien analysieren sowie Aase und Persson (1994), die auch den Fall laufender Beitragszahlung zulassen und eine Darstellung für eine angemessene Reserve derartiger Kontrakte herleiten, die als Verallgemeinerung der Thieleschen Differentialgleichung aufgefasst werden kann. In den folgenden Jahren erfolgten zahlreiche Analysen derartiger Kontrakte in komplexeren Modellen für den Finanzmarkt. Ausgelöst wurde diese Entwicklung von Bacinello und Ortu (1994) sowie Nielsen und Sandmann (1995), welche die Auswirkungen stochastischer Zinsen betrachten.

Deutschlandspezifische Literatur entstand erst Mitte der 90er Jahre. Der Großteil der Literatur bezog sich auf so genannte Aktienindexgebundene Lebensversicherungen mit Mindestgarantie. Nachdem das Produkt in Blohm (1996), Mattar (1996) sowie Meisch und Stolz (1996) eingeführt wurde, schlossen sich eine Reihe quantitativer Analysen an, die insbesondere auch auf Besonderheiten der deutschen Bilanzierungsvorschriften eingingen und die entsprechenden Risiken quantifizierten. Eine umfassende Analyse

[4] Zum Begriff des finanzrationalen Kundenverhaltens vgl. z.B. Dillmann und Ruß (1999).

zahlreicher Produktausgestaltungsformen auch unter stochastischen Zinsen findet man in Ruß (1999). Dort findet sich auch eine umfangreiche Literaturübersicht. Parallel entwickelte Kurz (1997) ein Modell zur Bewertung und Analyse von Fondsgebundenen Lebensversicherungen mit Mindestgarantie. Sie geht insbesondere auch auf Aspekte des Risikomanagements ein.

Die Literatur zu den in dieser Arbeit betrachteten Guaranteed Minimum Benefits in Variable Annuities ist noch relativ jung. Zwar gibt es Variable Annuities schon seit den frühen 70er Jahren (vgl. Sloane (1970)). Die weitestgehend empirischen Arbeiten aus dieser Zeit befassen sich jedoch hauptsächlich mit dem Vergleich verschiedener Produkte bzw. mit dem Vergleich von Variable Annuities und Investmentfonds (siehe Rentz Jr. (1972) bzw. Greene (1973)). Zwar gab es in diesen frühen Produkten schon einige Wahlmöglichkeiten und Garantien, wie zum Beispiel garantierte Verrentungsfaktoren. Die hier betrachteten garantierten Todes- oder Erlebensfallleistungen kamen jedoch erst in den 90er Jahren auf. Eine finanzmathematische Analyse und Bewertung dieser Produkte erfolgte daher erst in jüngerer Vergangenheit.

Milevsky und Posner (2001) bewerten GMDB-Optionen, also den Wert von garantierten Leistungen im Todesfall, für verschiedene Ausgestaltungsformen. Sie präsentieren geschlossene Formeln für diese „Titanic Option"[5] im Falle eines exponentiellen Sterbegesetzes und liefern numerische Ergebnisse für das realistischere Gompertz-Makeham Sterbegesetz. Sie stellen fest, dass diese Garantie im Allgemeinen über ihrem risikoneutralen Wert angeboten wird.

Milevsky und Salisbury (2002) stellen ein Modell vor, in dem bestimmte Todes- und Erlebensfallgarantien unter Einbeziehung von Storno bewertet werden. Sie bezeichnen diese Stornooption als „Real Option to Lapse".[6] Im Falle eines exponentiellen Sterbegesetzes, bei konstanten Stornogebühren und ohne Berücksichtigung von Ablaufgarantien finden die Autoren analytische Lösungen des Bewertungsproblems. Sie stellen fest, dass der Wert sowie die optimale Kundenstrategie stark von der Höhe der Garantie und der Stornogebühr abhängen.

Dieselben Autoren bewerten in Milevsky und Salisbury (2004) eine garantierte Entnahme-Option (vgl. Abschnitt 2.3.3). Neben einem statischen Ansatz, in dem sie die Option bei gegebenem Kundenverhalten bewerten, stellen sie auch einen dynamischen Ansatz vor, in welchem sie die Option unter finanzrationalem Kundenverhalten bewerten. Sie zeigen, dass in ihrem Modell optimalerweise immer mindestens die garantierten Entnahmebeträge entnommen werden sollten und stellen fest, dass derartige Optionen im Allgemeinem unter ihrem risikoneutralen Wert angeboten werden.

Obwohl es also Ansätze gibt, die einzelnen in Variable Annuities angebotenen Optionen zu bewerten, existiert noch kein allgemeines Modell, um solche Verträge in allen möglichen Ausgestaltungsformen konsistent zu bewerten. Die vorliegende Arbeit schließt diese Lücke: Unser Modell ermöglicht es, alle angebotenen Garantien in ihren verschiedenen Ausgestaltungsformen sowohl unter der Annahme eines deterministischen als auch unter der Annahme eines finanzrationalen Kundenverhaltens zu bewerten. Insbesondere lassen sich optimale Strategien,

[5] Die Autoren bezeichnen diese Option als „Titanic Option", da die Auszahlungsstruktur zwischen der von Europäischen und Amerikanischen Optionen liegt und die Auszahlung vom Ableben des Versicherten ausgelöst wird.

[6] „Real Option" ist hier als finanzielle Option und nicht als Realoption (vgl. Myers (1977)) zu verstehen.

risikoneutrale Werte und faire Garantiegebühren auch für Verträge bestimmen, die gleichzeitig mehrere derartige Optionen beinhalten.

2 Verschiedene Arten von Guaranteed Minimum Benefits

Im Folgenden beschreiben und kategorisieren wir die wichtigsten derzeit am amerikanischen Markt angebotenen Garantien. Nach einer kurzen Darstellung des Grundprodukts Variable Annuity gehen wir auf verschiedene Formen von garantierten Todesfallleistungen und von Erlebensfallgarantien ein. Wir beschreiben jeweils die entsprechende Garantie aus Kundensicht und geben einen Überblick über typische Preise dieser Garantien.

2.1 Variable Annuities in den USA

Variable Annuities sind aufgeschobene, fondsgebundene Rentenversicherungen, die in der Regel gegen Einmalbeitrag angeboten werden. Wir betrachten daher im Folgenden auch ausschließlich Einmalbeitragsprodukte. Bei Vertragsabschluss werden häufig optionale Todesfall- oder Erlebensfallgarantien für die Ansparphase angeboten, die gegen zusätzliche laufende Gebühren erhältlich sind. Die wichtigsten Arten dieser Garantien werden in den Abschnitten 2.2 und 2.3 detailliert erläutert.
Bei allen Ausgestaltungen wird der Einmalbeitrag P des Kunden in ein Anlageportfolio (ein oder mehrere Investmentfonds) investiert. Der Wert A_t des individuellen Portfolios wird im Folgenden mit Fondsguthaben oder Guthaben bezeichnet. Der Kunde kann in der Regel das Risikoprofil seines Portfolios durch eine individuelle Fondsauswahl beeinflussen. Alle laufenden Kosten werden dem Fondsguthaben durch Verkauf von Fondsanteilen entnommen. Der Kunde hat insbesondere die Möglichkeit, den Vertrag zu stornieren, Geld zu entnehmen oder sein Guthaben nach einer Mindestlaufzeit zu verrenten.
Folgende Begriffe spielen bei Guaranteed Minimum Benefits eine wichtige Rolle: Die *Ratchet Benefit Base* zu einem Zeitpunkt t ist der höchste Stand des Fondsguthabens an definierten Stichtagen vor dem Zeitpunkt t. In der Regel ist es der höchste Stand des Guthabens an einem der vergangenen Policenjahrestage. Bei dieser jährlichen Höchststandsbetrachtung spricht man auch von einer Annual Ratchet Benefit Base. Wir betrachten im Folgenden ausschließlich den Fall der jährlichen Höchststandsabsicherung.
Darüber hinaus gibt es noch die so genannte *Roll-Up Benefit Base*. Darunter verstehen wir den fiktiven Wert, den das Guthaben zum Zeitpunkt t aufweisen würde, wenn die anfängliche Einmalprämie P eine konstante Verzinsung von i % p.a. erzielt hätte. Dieser Zins wird als *Roll-Up Rate* bezeichnet.

2.2 Guaranteed Minimum Death Benefits

Während der Ansparphase wird bei Ableben der versicherten Person eine Todesfallleistung bezahlt. Bei Verrentung erlischt in der Regel der Todesfallschutz. Die Ausgestaltungen der angebotenen Mindesttodesfallleistungen und insbesondere die Kalkulation der zugehörigen Risikoprämien unterscheiden sich stark von typischen deutschen Fondspolicen. In den ersten Jahren nach ihrer Einführung wurden Variable Annuities in der Regel nur mit einer Basisvariante für den Todesfallschutz angeboten.

Mitte der 90er Jahre begannen die Versicherer, weitere teilweise deutlich komplexere Modelle anzubieten.[7]

2.2.1 Übliche Varianten für den Todesfallschutz

Bei der Basisvariante *Return of Premium Death Benefit* (Beitragsrückgewähr) wird im Todesfall der Wert des Fondsguthabens, mindestens aber der eingezahlte Bruttobeitrag bezahlt. Der Preis für diese Todesfallleistung ist in der Regel bereits in die dem Kunden genannten Verwaltungskosten mit eingerechnet. Diese Option ist somit ohne zusätzliche, explizit ausgewiesene Kosten erhältlich.
Bei der Variante *Annual Roll-Up Death Benefit* (garantierte Mindestverzinsung) entspricht die Todesfallleistung gerade dem Maximum aus der Roll-Up Benefit Base (oft mit einer Roll-Up Rate von 5% oder 6% berechnet) und dem Fondsguthaben. Diese Variante wird in der Regel gegen vereinbarte zusätzliche jährliche Kosten angeboten. Man beachte, dass das Basismodell (Beitragsrückgewähr) ein Spezialfall dieses Modells für $i = 0$ ist.
Eine weitere Option ist der *Annual Ratchet Death Benefit* (jährliche Höchststandsabsicherung). Hier beträgt die Todesfallleistung das Maximum aus dem Wert des Fondsguthabens und der Annual Ratchet Benefit Base. Auch diese Variante wird in der Regel gegen vereinbarte zusätzliche jährliche Kosten angeboten.
Darüber hinaus gibt es die Variante *Greater of Annual Ratchet or Annual Roll-Up Death Benefit.* Diese leistet im Todesfall das Maximum aus dem Wert des Fondsguthabens, der Annual Ratchet Benefit Base und der Roll-Up Benefit Base.
Schließlich können die obigen Varianten bei manchen Anbietern noch mit einer weiteren Zusatzoption, dem so genannten *Earnings Enhancement Benefit* kombiniert werden. Bei Wahl dieser Option wird die Todesfallleistung weiter erhöht. Diese Option wird meistens aus steuerlichen Gründen angeboten[8] und wird im Folgenden nicht weiter analysiert.

2.2.2 Gebühren für die Garantien

Die Basisvariante (Return of Premium) wird in der Regel ohne zusätzliche Kosten angeboten. Die anderen Varianten werden gegen eine jährliche Gebühr angeboten. Die Höhe der Gebühr hängt von der konkreten Ausgestaltung der Variante ab und variiert von Anbieter zu Anbieter. Üblicherweise beträgt die Gebühr für die Variante Annual Ratchet Death Benefit sowie für 6% Roll-Up Death Benefit jährlich rund 0,25% des Fondsguthabens. Für eine Todesfallleistung der Form Greater of Annual Ratchet or Annual Roll-Up Death Benefit werden bei i = 6% rund 0,6% p.a. an Gebühren erhoben.[9]
Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass alle genannten Gebühren in Prozent des Fondsguthabens erhoben werden und diesem Guthaben entnommen werden. Dies bedeutet insbesondere, dass bei fallenden Fondskursen das riskierte Kapital zwar steigt, die erhobene Gebühr für den Todesfallschutz jedoch fällt. Dies steht in starkem Gegensatz zur Kalkulation in Deutschland, bei der in der Regel jeden Monat das aktuelle riskierte Kapital berechnet wird. Durch Multiplikation mit der Sterbewahrscheinlichkeit wird dann eine angemessene Risikoprämie bestimmt und dem

[7] Vgl. Lehman Brothers (2005).
[8] Vgl. Cruz (2005).
[9] Vgl. JPMorgan (2004).

Fondsguthaben entnommen. Durch diese Kalkulationsweise trägt der Versicherer nahezu kein Kapitalmarktrisiko. Risikodiversifikation ist also alleine durch das Gesetz der großen Zahlen möglich. Die geschilderte Kalkulation von GMDB-Optionen bei amerikanischen Policen ist hingegen nur sinnvoll, wenn die so kalkulierten Gebühren in ein entsprechendes Hedging-Portfolio investiert werden, das eine Absicherung gegen adverse Kapitalmarktszenarien ermöglicht.

2.3 Guaranteed Minimum Living Benefits

Erst gegen Ende der 90er Jahre wurden zusätzlich zu den garantierten Todesfallleistungen auch Produkte mit garantierten Erlebensfallleistungen (*Guaranteed Minimum Living Benefits* - GMLB) eingeführt.[10] Häufig ist in Verbindung mit GMLB-Optionen nur eine eingeschränkte Fondsauswahl zulässig.
Die Varianten *Guaranteed Minimum Accumulation Benefits* (GMAB) und *Guaranteed Minimum Income Benefits* (GMIB) entstanden nahezu zeitgleich. Beide Varianten bieten dem Kunden eine garantierte Ablaufleistung zu einem gewissen Zeitpunkt, bei GMIB greift die Garantie jedoch nur, wenn das entsprechende Kapital verrentet wird. Im Jahre 2002 wurden dann *Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits* (GMWB) eingeführt. Bei derartigen Produkten werden dem Kunden gewisse garantierte Mindestentnahmen aus seinem Guthaben zugesichert, die er auch dann noch vornehmen kann, wenn das Guthaben durch frühere Entnahmen und eventuell fallende Kurse bereits aufgebraucht ist. Produkte mit GMWB-Optionen sind seit ihrer Einführung extrem populär und hatten bereits 2004 einen Anteil von 69% am Neugeschäft von Variable Annuities.[11] Jeder der 15 größten Anbieter von Variable Annuities bietet derzeit (Stand 2005) diese Option an.

2.3.1 Guaranteed Minimum Accumulation Benefits (GMAB)

Guaranteed Minimum Accumulation Benefits stellen die einfachste Form von Erlebensfallgarantien dar. Dem Kunden wird bei Erleben eines festgelegten Zeitpunkts T ein Mindest-Portfoliowert G_T^A garantiert. In der Regel ist G_T^A gerade der bezahlte Bruttobeitrag, selten auch eine Roll-Up Benefit Base. Wählt der Kunde die GMAB-Option, so wird seinem Fondsguthaben laufend eine Gebühr entnommen. Diese beträgt je nach Ausgestaltung und je nach Anbieter jährlich rund 0,25%-0,75% des Fondsguthabens.[12]

2.3.2 Guaranteed Minimum Income Benefits (GMIB)

Bei GMIB-Produkten hat der Kunde am Ende der Ansparphase T neben den Standardmöglichkeiten Kapitalwahl (Auszahlung des angesparten Fondsguthabens A_T) und Verrentung (Verrentung des angesparten Fondsguthabens A_T zu dann gültigen Konditionen) noch eine dritte Möglichkeit: Die Verrentung des zum Zeitpunkt T garantierten Kapitals G_T^I zu bereits bei Vertragsabschluss garantierten Konditionen. Dies entspricht also einer bereits bei Vertragsabschluss garantierten Mindestrente.
Die im Rahmen der GMIB-Option ausgesprochene Garantie gilt somit nur für den Fall, dass der Kunde am Ende der Ansparphase sein Guthaben verrentet. Die Garantie ist

[10] Vgl. Lehman Brothers (2005).
[11] Vgl. Lehman Brothers (2005).
[12] Vgl. Müller (2005).

zum Ende der Ansparphase werthaltig (im Geld), falls die Verrentung des Garantiekapitals G_T^I zu den bei Vertragsabschluss garantierten Konditionen zu einer höheren Rente führt als die Verrentung des Fondsguthabens A_T zu bei T aktuellen Konditionen.

Das Garantiekapital G_T^I ist bei GMIB-Produkten in der Regel eine Roll-Up Benefit Base (z.B. mit i = 5% oder 6%) oder eine Ratchet Benefit Base. Oft kann der Kunde den Zeitpunkt T im Rahmen einer flexiblen Ausübungsphase frei wählen, beispielsweise kann er einen beliebigen Zeitpunkt nach Ablauf einer Mindestwartezeit und vor Erreichen des 80ten Lebensjahrs wählen.

Auffällig ist, dass die derzeit angebotenen Roll-Up Rates meist über dem risikolosen Zins liegen. Dies ist damit zu erklären, dass die Option nicht ausgeübt werden kann, wenn der Versicherte vor dem Ende der Ansparphase stirbt oder storniert. In beiden Fällen werden aber Garantiekosten bis zum Tod bzw. zum Storno erhoben. Darüber hinaus sind die bei Abschluss garantierten Verrentungsfaktoren konservativ, sodass die Option unter Umständen selbst dann nicht im Geld ist, wenn das Fondsguthaben A_T geringer ist als das Garantiekapital G_T^I. Ferner liegen der Kalkulation oft Annahmen über die Ausübungswahrscheinlichkeit zu Grunde. Hier wird offensichtlich oft angenommen, dass ein gewisser Anteil der Versicherten sich nicht finanzrational verhält, also die Option nicht ausübt, obwohl sie im Geld ist.[13]

Die Gebühr für die GMIB-Option beträgt je nach Ausgestaltung und je nach Anbieter jährlich rund 0,5%-0,75% des Fondsguthabens. [14]

2.3.3 Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits (GMWB)

Bei Produkten mit einer GMWB-Option wird dem Kunden garantiert, dass er nach und nach einen bei Vertragsabschluss t = 0 definierten garantierten Entnahmebetrag G_0^W (in der Regel seinen Einmalbeitrag) während der Laufzeit des Produkts dem Guthaben entnehmen kann, sofern er in jedem Jahr höchstens einen definierten Anteil x_W dieses Betrags entnimmt, z.B. x_W = 7%.[15] Die Entnahmen reduzieren jeweils das Fondsguthaben um den entnommenen Betrag. Insbesondere bei fallenden Märkten kann dies dazu führen, dass der Kunde selbst dann noch garantierte Entnahmen vornehmen kann, wenn sein Guthaben Null erreicht hat. Fällt das Kundenkonto durch die Entnahmen nicht auf Null, so kann der Kunde bei Ablauf der Versicherung über das verbleibende Kapital in üblicher Weise verfügen (Kapitalauszahlung oder Verrentung).

Neuerdings werden GMWB-Optionen auch mit Möglichkeiten zur Erhöhung der Garantie während der Laufzeit angeboten. Bei diesen so genannten *Step-Up Varianten* erhöht sich der Betrag, der insgesamt garantiert entnommen werden kann, zu gewissen bei Vertragsabschluss definierten Zeitpunkten. In der Regel wird der neue Garantiebetrag um einen gewissen Prozentsatz erhöht, sofern bis dahin noch keine Entnahmen vorgenommen wurden. Diese Variante wird im Folgenden betrachtet. Darüber hinaus

[13] Vgl. Milevsky und Salisbury (2004). Darüber hinaus hat ein Vorstand eines amerikanischen Versicherers, der derartige Garantien anbietet, im Rahmen einer Diskussion beim ersten World Risk and Insurance Economics Congress 2005 in Salt Lake City bestätigt, dass der Kalkulation derartige Annahmen über das Ausübungsverhalten zu Grunde liegen.

[14] Vgl. Müller (2005).

[15] Alternativ gibt es selten auch Produkte, bei denen $x_W(t)$ (t=1,2,…,T) sich abhängig vom Policenjahr ändert. Wir beschränken uns im Folgenden auf Produkte mit $x_W(t)$= x_W, unabhängig vom Policenjahr t.

gibt es Produkte, bei denen das jeweils aktuelle Guthaben als neuer Garantiebetrag verwendet wird, sofern es den bisherigen Betrag übersteigt.
Entnimmt der Kunde in einem Jahr mehr als x_W% des garantierten Entnahmebetrags, so werden die künftigen Garantien reduziert. Hierfür gibt es verschiedene Modelle am Markt. Die wichtigsten werden in Abschnitt 3 beschrieben.
Die GMWB-Option ist aus finanzmathematischer Sicht sehr komplex, da der Kunde zu jedem Zeitpunkt entscheiden kann ob und ggf. wie viel er entnimmt. Sie wird derzeit gegen eine Gebühr von jährlich rund 0,4% bis 0,65% des Fondsguthabens angeboten. Milevsky und Salisbury (2004) kommen zu dem Schluss, dass diese Gebühren deutlich unter dem Wert der entsprechenden Optionen liegen. Sie folgern, dass die Versicherer dies entweder aus anderen Gebühren quersubventionieren oder von nicht finanzrational handelnden Kunden ausgehen.
Mittlerweile gibt es am US-amerikanischen Markt eine Vielzahl von Varianten und Ausgestaltungen der hier beschriebenen Erlebensfall- und Todesfallgarantien. Die obige Beschreibung der Produkte dient der Kategorisierung der wichtigsten Grundformen. Einige am Markt angebotene Produkte weichen in gewissen Details leicht von diesen Grundformen ab.[16] Unser Modell und der im Folgenden vorgestellte Bewertungsansatz gehen von obiger Kategorisierung aus. Bei der Spezifikation von Details zur numerischen Bewertung orientieren wir uns an den Eigenschaften einiger am Markt angebotener Produkte. Das Modell lässt jedoch grundsätzlich die Bewertung aller Ausgestaltungsformen zu.

3 Ein allgemeines Modell zur Beschreibung und Bewertung von Guaranteed Minimum Benefits

3.1 Modellierung des Finanzmarkts

Wir gehen von einem ***F***-filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,F,Q) mit einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß aus. Unter diesem Maß kann der risikoneutrale Wert zukünftiger Zahlungsströme als diskontierter Erwartungswert bestimmt werden.[17]
Die Existenz dieses Maßes impliziert Arbitragefreiheit des Marktes. Als Numeraire verwenden wir ein Bankkonto B_t.
Wir gehen davon aus, dass der dem Versicherungsvertrag zu Grunde liegende Fonds S_t einer geometrisch Brown'schen Bewegung mit konstanten Koeffizienten folgt: $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dZ_t$. Hier bezeichnet Z einen an ***F*** angepassten Wiener-Prozess auf (Ω,F,Q), r den risikolosen Zins und σ die Volatilität des Fondskurses. Mithilfe der Itô-Formel ergibt sich somit

$$S_{t+1} = S_t \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma\, z_t\right\}; \quad z_t \sim N(0,1). \tag{1}$$

Wir setzen ferner $S_0 = 1$ und $B_0 = 1$ und erhalten $B_t = e^{rt}$.

[16] Informationen über aktuell am Markt angebotene Produkte und die für die Garantien erhobenen Gebühren sind beispielsweise unter www.annuityfyi.com erhältlich.
[17] Zu dieser risikoneutralen Bewertungsformel vgl. z.B. Kapitel 4.4 in Bingham und Kiesel (2004).

3.2 Modellierung des Versicherungsvertrags

Mit dem im Folgenden vorgestellten Modell kann jeder Versicherungsvertrag modelliert werden, der keine, eine oder mehrere der vorgestellten GMDB-Varianten (Return of Premium, Annual Ratchet, Annual Roll-Up) und keine, eine oder mehrere Varianten der drei vorgestellten GMLB-Optionen (GMAB, GMIB, GMWB) besitzt. In unseren numerischen Analysen betrachten wir jedoch ausschließlich Kontrakte, die höchstens eine GMDB-Variante und höchstens eine GMLB-Option beinhalten.

Wir betrachten einen Versicherungsvertrag mit endlicher, ganzzahliger Laufzeit T, der bei $t = 0$ gegen einen Einmalbeitrag P abgeschlossenen wird.[18]

Den Wert des Fondsguthabens zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit A_t. Wir gehen vereinfachend davon aus, dass der Vertrag keine up-front Kosten beinhaltet. Daher ist $A_0 = P$. Während der Laufzeit des Vertrags betrachten wir ferner nur diejenigen Kosten, die für die Garantien relevant sind, nämlich die laufenden Kosten für die angebotenen Garantie-Optionen und eine Stornogebühr, falls Entnahmen vorgenommen werden, die nicht im Rahmen einer GMWB-Option garantiert sind (Teilkündigungen oder Storno). Die laufenden Kosten φ für die Garantie-Optionen sind proportional zum Fondsguthaben, die Stornogebühr s ist proportional zum entsprechenden entnommenen Betrag.

Zur Bewertung der Leistungen des Vertrags definieren wir zunächst zwei fiktive Konten: Mit W_t bezeichnen wir den Wert zum Zeitpunkt t des so genannten *Entnahmekontos*. Auf diesem Konto werden gedanklich alle während der Vertragslaufzeit getätigten Entnahmen eingezahlt und bis zum Zeitpunkt T mit dem risikolosen Zins r verzinst. Wir setzen $W_0 = 0$.

Analog bezeichnet D_t den Wert zum Zeitpunkt t eines fiktiven Kontos mit Todesfallzahlungen. Auf diesem *Todesfallkonto* wird gedanklich die eventuell anfallende Todesfallleistung eingezahlt und ebenfalls bis T risikolos verzinst. Wir setzen $D_0 = 0$.

Zur Beschreibung der Entwicklung des Vertrags und seiner Garantien im Zeitverlauf benötigen wir neben diesen beiden Konten noch die folgenden Prozesse:

Die garantierte Todesfallleistung zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit G_t^D, sodass die Todesfallleistung bei Tod zum Zeitpunkt t gerade $\max\{A_t; G_t^D\}$ beträgt. Wir setzen $G_0^D = A_0$ für Verträge mit einer der beschriebenen Formen von GMDB. Ansonsten ist $G_0^D = 0$. Die Entwicklung des Prozesses G_t^D im Zeitverlauf hängt von der konkreten Variante ab und wird in Abschnitt 3.3 erläutert.

Die garantierte Erlebensfallleistung bei T der GMAB-Option wird mit G_T^A bezeichnet. Bei manchen Vertragskonstellationen ist es möglich, dass sich die bei Vertragsabschluss vereinbarte garantierte Erlebensfallleistung abhängig von Kundenaktionen (z.B. Entnahmen aus dem Fondsguthaben, also Teilkündigungen) oder Kursentwicklungen (z.B. bei Höchststandsgarantien) während der Vertragslaufzeit verändert. Daher definieren wir einen Prozess G_t^A, dessen Verlauf (wie in Abschnitt 3.3 detailliert beschrieben) von Kundenaktionen und dem Kursverlauf abhängt und der bei Fälligkeit gerade die garantierte Erlebensfallleistung G_T^A beträgt. Wir setzen $G_0^A = A_0$

[18] Flexible Abrufoptionen können in unserem Modell ebenfalls abgebildet und mit den vorgestellten numerischen Verfahren bewertet werden. Wir verzichten hier jedoch darauf, um die Notation nicht unnötig zu komplizieren.

für Verträge mit GMAB-Option, ansonsten ist $G_0^A = 0$. Bei Verträgen ohne GMAB-Option ist durch $G_0^A = 0$ und die in Abschnitt 3.3 beschriebene Entwicklung des Prozesses sichergestellt, dass $G_T^A = 0$ gilt.

Das garantierte Verrentungskapital bei T im Falle einer GMIB-Option nennen wir G_T^I. Auch G_T^I kann sich im Zeitverlauf ändern, sodass wir einen Prozess G_t^I analog zu G_t^A definieren, insbesondere setzen wir wieder $G_0^I = A_0$ für Verträge mit GMIB-Option, ansonsten ist $G_0^I = 0$. Die Entwicklung dieses Prozesses im Zeitverlauf wird ebenfalls in Abschnitt 3.3 erläutert.

Schließlich benötigen wir noch zwei Prozesse zur Beschreibung von GMWB-Optionen: G_t^W bezeichnet die zum Zeitpunkt t noch ausstehenden garantierten Entnahmen der GMWB-Option. Diese Größe gibt also an, welcher Betrag in Zukunft noch für garantierte Entnahmen zur Verfügung steht. Wir setzen $G_0^W = A_0$ für Verträge mit GMWB. Ansonsten ist $G_0^W = 0$. Den garantierten Entnahmebetrag der GMWB-Option pro Jahr bezeichnen wir mit G_t^E. Diese Größe gibt zum Ende jedes Jahres (also für ganzzahliges t) an, welcher Betrag maximal entnommen werden darf, ohne die Option zu verändern. Wir setzen $G_0^E = x_W A_0$ wobei x_W den Anteil des anfänglichen Guthabens bezeichnet, der pro Jahr maximal entnommen werden kann. Die Entwicklung von G_t^W und G_t^E im Zeitverlauf wird in Abschnitt 3.3 erläutert.

Auf Grund der Markov-Eigenschaft der zu Grunde liegenden Prozesse, ist die zum Zeitpunkt t vorhandene Information durch die so genannten Zustandsvariablen A_t, W_t, D_t, G_t^A, G_t^I, G_t^D, G_t^W und G_t^E vollständig charakterisiert. Zur Vereinfachung der Notation kürzen wir den so genannten Zustandsvektor zum Zeitpunkt t im Folgenden mit $y_t = \left(A_t, W_t, D_t, G_t^A, G_t^I, G_t^D, G_t^W, G_t^E\right)$ ab.

3.3 Modellierung des Verlaufs eines Versicherungsvertrags

Während der Laufzeit eines Vertrags können folgende Ereignisse eintreten: garantierte Entnahmen im Rahmen der GMWB-Option, sonstige Entnahmen aus dem Guthaben (also Teilkündigungen), Storno oder Tod. Wir gehen vereinfachend davon aus, dass alle derartigen Ereignisse – insbesondere auch Tod – nur zum Ende eines Policenjahres erfolgen können. Wir unterscheiden daher für ganzzahliges $t = 1,2,...,T$ bei allen Zustandsvariablen zwischen $(\cdot)_t^-$ und $(\cdot)_t^+$, was den entsprechenden Wert vor bzw. nach den beschriebenen Ereignissen symbolisiert.

Die Startwerte der Prozesse bei $t = 0$ wurden bereits in Abschnitt 3.2 festgelegt. Wir beschreiben nun den Verlauf der Prozesse in zwei Schritten: Zunächst für $t = 0,1,2,...,T-1$ die Veränderung der Prozesse während eines Policenjahres, also den Übergang von t^+ nach $(t+1)^-$ und im Anschluss die Veränderung der Prozesse zu einem Jahrestag der Police also den Übergang von $(t+1)^-$ nach $(t+1)^+$. Hierbei gehen insbesondere die Entscheidungen des Kunden über Entnahmen und Storno ein. Abschließend betrachten wir die Ablaufleistungen des Vertrags.

3.3.1 Übergang von t^+ nach $(t+1)^-$

Der Fondskurs S_t entwickelt sich wie in Abschnitt 3.1 beschrieben. Für das Fondsguthaben ergibt sich somit unter Berücksichtigung der (stetig erhobenen) Garantiekosten φ

$$A_{t+1}^- = A_t^+ \frac{S_{t+1}}{S_t} \cdot e^{-\varphi}. \qquad (2)$$

Darüber hinaus werden die Konten W_t und D_t unterjährig mit dem risikolosen Zins r verzinst: $W_{t+1}^- = W_t^+ e^r$ bzw. $D_{t+1}^- = D_t^+ e^r$.

Die Prozesse zur Modellierung der Garantien G_t^D, G_t^A und G_T^I entwickeln sich abhängig von der Art der Garantie: Falls die jeweilige garantierte Leistung[19] der Einmalprämie entspricht oder falls die entsprechende Option nicht im Vertrag beinhaltet ist, gilt $G_{t+1}^{D/A/I-} = G_t^{D/A/I+}$. Falls die garantierte Leistung eine Roll-Up Benefit Base mit Roll-Up Rate i ist, so gilt $G_{t+1}^{D/A/I-} = G_t^{D/A/I+}(1+i)$. Liegt hingegen eine Höchststandsgarantie vor (jährliche Ratchet Benefit Base), so gilt $G_{t+1}^{D/A/I-} = G_t^{D/A/I+}$, da die Anpassung an neue Höchststände erst nach eventuellen Entnahmen stattfindet, also beim Übergang von $(t+1)^-$ nach $(t+1)^+$ (siehe Abschnitt 3.3.2).

Die Prozesse G_t^W und G_t^E verändern sich unterjährig nicht, d.h. $G_{t+1}^{W/E-} = G_t^{W/E+}$.

3.3.2 Übergang von $(t+1)^-$ nach $(t+1)^+$

Zum Jahrestag der Police $(t+1)$ sind vier Fälle zu unterscheiden:

<u>a) Die versicherte Person stirbt im Jahr $(t,t+1]$</u>

Da wir Tod nur zum Ende des Policenjahres zulassen, ist dies gleichbedeutend mit Tod zum Zeitpunkt $t+1$. In diesem Fall wird die Todesfallleistung fällig und auf das fiktive Todesfallkonto eingezahlt, wo sie sich bis T verzinst: $D_{t+1}^+ = D_{t+1}^- + \max\{G_{t+1}^{D-}; A_{t+1}^-\}$. Da nach Tod des Versicherungsnehmers keine weiteren Leistungen mehr fällig werden, setzen wir in diesem Fall $A_{t+1}^+ = 0$ sowie $G_{t+1}^{A/I/W/D/E+} = 0$. Das Entnahmekonto, auf dem eventuelle Entnahmen aus der Vergangenheit verbucht wurden, verändert sich nicht: $W_{t+1}^+ = W_{t+1}^-$. Dieses Konto wird bis T weiter verzinst.

<u>b) Die versicherte Person stirbt im Jahr $(t,t+1]$ nicht und bei $t+1$ wird keine Aktion (Storno, garantierte Entnahme, sonstige Entnahme) durchgeführt</u>

In diesem Fall verändern sich zum Jahrestag der Police weder das Guthaben des Kunden noch die beiden Konten D und W. Daher gilt $A_{t+1}^+ = A_{t+1}^-$, $D_{t+1}^+ = D_{t+1}^-$ und $W_{t+1}^+ = W_{t+1}^-$. Für diejenigen Garantien aus GMAB, GMIB und GMDB, für die keine Höchststandsgarantie vereinbart wurde, gilt analog $G_{t+1}^{A/I/D+} = G_{t+1}^{A/I/D-}$. Falls eine oder mehrere dieser Garantien jedoch als Höchststandsgarantie ausgestaltet sind, gilt für diese Werte $G_{t+1}^{A/I/D+} = \max\left\{G_{t+1}^{A/I/D-}; A_{t+1}^+\right\}$.

Falls eine GMWB-Option mit Step-Up Variante eingeschlossen ist und $t+1$ ein Step-Up Zeitpunkt ist, so erhöht sich der in Zukunft insgesamt zu entnehmende Betrag (und

[19] Unter „garantierte Leistung" verstehen wir die garantierte Todesfallleistung bei einer GMDB-Option, die garantierte Erlebensfallleistung bei einer GMAB-Option bzw. das garantiert zur Verrentung zur Verfügung stehende Kapital bei einer GMIB-Option.

somit auch der garantierte jährliche Entnahmebetrag) um einen Faktor $i_{W_{t+1}}$, sofern in der Vergangenheit keine Entnahmen getätigt wurden. Damit gilt: $G_{t+1}^{W+} = G_{t+1}^{W-}\left(1 + \mathrm{I}_{\{W_{t+1}^{-}=0\}} \cdot i_{W_{t+1}}\right)$ und $G_{t+1}^{E+} = x_W \cdot G_{t+1}^{W+}$. In allen anderen Fällen gilt $G_{t+1}^{W/E+} = G_{t+1}^{W/E-}$.

<u>c) Die versicherte Person stirbt im Jahr $(t,t+1]$ nicht und bei $t+1$ wird lediglich eine im Rahmen der GMWB-Option garantierte Entnahme durchgeführt</u>

Eine im Rahmen der GMWB-Option garantierte Entnahme ist eine Entnahme eines Betrags $E_{t+1} \leq \min\{G_{t+1}^{E-}; G_{t+1}^{W-}\}$, da der Kunde einerseits höchstens den im entsprechenden Jahr zulässigen maximalen Entnahmebetrag G_{t+1}^{E-} und andererseits nicht mehr als die insgesamt noch ausstehenden garantierten Entnahmen G_{t+1}^{W-} entnehmen kann.

Bei einer derartigen Entnahme reduziert sich das Guthaben um den Entnahmebetrag. Da es sich um eine garantierte Entnahme handelt, kann das Guthaben dadurch aber nicht negativ werden. Somit gilt $A_{t+1}^{+} = \max\{0; A_{t+1}^{-} - E_{t+1}\}$. Ferner reduzieren sich auch die insgesamt in der Zukunft noch zulässigen Entnahmen um den entnommenen Betrag: $G_{t+1}^{W+} = G_{t+1}^{W-} - E_{t+1}$. Die erfolgte Entnahme schreiben wir dem fiktiven Entnahmekonto gut: $W_{t+1}^{+} = W_{t+1}^{-} + E_{t+1}$. Der maximal pro Jahr garantiert zu entnehmende Betrag sowie das Todesfallkonto bleiben dadurch unverändert, d.h. $G_{t+1}^{E+} = G_{t+1}^{E-}$ und $D_{t+1}^{+} = D_{t+1}^{-}$.

Bei den üblicherweise angebotenen Produkten werden bei jeder Entnahme die Erlebensfallgarantien (GMAB und GMIB) und zur Vermeidung adverser Selektion auch die garantierte Todesfallleistung reduziert: Wir verwenden im Folgenden eine so genannte pro rata Anpassung. Hierbei gilt für diejenigen Garantien, für die keine Höchststandsgarantie vereinbart wurde, $G_{t+1}^{A/I/D+} = \left(\frac{A_{t+1}^{+}}{A_{t+1}^{-}}\right) G_{t+1}^{A/I/D-}$. Falls eine oder mehrere dieser Garantien als Höchststandsgarantie ausgestaltet sind, so gilt für diese Werte $G_{t+1}^{A/I/D+} = \max\left\{A_{t+1}^{+}; \left(\frac{A_{t+1}^{+}}{A_{t+1}^{-}}\right) G_{t+1}^{A/I/D-}\right\}$.[20]

<u>d) Die versicherte Person stirbt im Jahr $(t,t+1]$ nicht und bei $t+1$ wird eine Entnahme durchgeführt, die nicht oder nicht vollständig im Rahmen der GMWB garantiert ist</u>

Man beachte zunächst, dass dieser Fall folgende Spezialfälle beinhaltet:

d1) Der Vertrag besitzt keine GMWB-Option, der Kunde entnimmt dennoch einen Teil $E_{t+1} < A_{t+1}^{-}$ seines Guthabens.

d2) Der Vertrag besitzt eine GMWB-Option, der Kunde entnimmt jedoch einen Betrag E_{t+1} aus seinem Guthaben mit $A_{t+1}^{-} > E_{t+1} > \min\{G_{t+1}^{E-}; G_{t+1}^{W-}\}$.

[20] Neben der pro rata Reduktion gibt es auch die Reduktion nach der „Dollar-Methode", bei der die entsprechenden Prozesse gerade um den entnommenen Betrag reduziert werden, also $G_{t+1}^{A/I/D+} = \max\left[G_{t+1}^{A/I/D-} - E_{t+1}, 0\right]$. Zur Modellierung und Bewertung von Produkten, bei denen die Garantiewerte nach der Dollar-Methode oder einem anderen Mechanismus angepasst werden, können die entsprechenden Formeln entsprechend angepasst werden.

d3) Der Kunde storniert den Vertrag durch Entnahme von $E_{t+1} = A^-_{t+1}$.[21]

Wir zerlegen zunächst den Entnahmebetrag in zwei Komponenten: $E_{t+1} = E^1_{t+1} + E^2_{t+1}$ mit $E^1_{t+1} = \min\left\{G^{E-}_{t+1}; G^{W-}_{t+1}\right\}$. Hierbei ist E^1_{t+1} also gerade der durch die GMWB-Option garantierte Teil der Entnahme. Wenn der Vertrag keine GMWB-Option enthält, ist natürlich stets $E^1_{t+1} = 0$.

Durch die Entnahme reduziert sich wie in Fall c) das Guthaben, sodass $A^+_{t+1} = A^-_{t+1} - E_{t+1}$. Das fiktive Entnahmekonto erhöht sich um den entnommenen Betrag. Allerdings fallen auf den Betrag E^2_{t+1} Stornogebühren an. Es gilt also $W^+_{t+1} = W^-_{t+1} + E^1_{t+1} + E^2_{t+1} \cdot (1-s)$. Das Todesfallkonto bleibt unverändert: $D^+_{t+1} = D^-_{t+1}$.

Auch in diesem Fall ist zu berücksichtigen, dass wie oben geschildert die künftigen Garantien durch die Entnahme verändert werden: Für diejenigen Garantien, für die keine Höchststandsgarantie vereinbart wurde, gilt $G^{A/I/D+}_{t+1} = \left(\frac{A^+_{t+1}}{A^-_{t+1}}\right) G^{A/I/D-}_{t+1}$. Falls eine oder mehrere der Garantien als Höchststandsgarantien ausgestaltet sind, gilt für diese Werte $G^{A/I/D+}_{t+1} = \max\left\{A^+_{t+1}; \left(\frac{A^+_{t+1}}{A^-_{t+1}}\right) G^{A/I/D-}_{t+1}\right\}$.

Bei Verträgen mit GMWB-Option hat eine Entnahme von $E_{t+1} > \min\left\{G^{E-}_{t+1}; G^{W-}_{t+1}\right\}$ auch eine Auswirkung auf zukünftig garantierte Entnahmen. Eine übliche Variante[22] sieht vor, dass sich die noch ausstehenden garantierten Entnahmen gemäß $G^{W+}_{t+1} = \min\left\{G^{W-}_{t+1} - E_{t+1}; G^{W-}_{t+1} \cdot \frac{A^+_{t+1}}{A^-_{t+1}}\right\}$ reduzieren. Dies entspricht also einer pro rata Reduktion oder einer Reduktion nach der Dollar-Methode (vgl. Fußnote 20), je nachdem, welche Reduktion stärker ist. Für die künftigen pro Jahr garantierten Entnahmen gilt in der Regel $G^{E+}_{t+1} = G^{E-}_{t+1} \cdot \frac{A^+_{t+1}}{A^-_{t+1}}$.[23]

3.3.3 Leistungen bei T

Wenn weder eine GMAB-Option noch eine GMIB-Option vereinbart wurde, beträgt die Leistung bei Erleben des Vertragsablaufs gerade $L_T = A^+_T$. Liegt hingegen eine GMAB-Option vor und erlebt die versicherte Person den Ablauftermin, so ergibt sich die Ablaufleistung zu $L^A_T = \max\left\{A^+_T; G^{A+}_T\right\}$.

Bei Verträgen mit GMIB-Option ist die Situation etwas komplizierter. Der Versicherte kann entweder sein Fondsguthaben A_T als Einmalzahlung entnehmen oder zu dann aktuellen Konditionen verrenten. In beiden Fällen ist der Wert der Leistung gerade A_T.

[21] Liegt eine GMWB-Option vor und ist $A^-_{t+1} \le \min\left\{G^{E-}_{t+1}; G^{W-}_{t+1}\right\}$ sowie $A^-_{t+1} < G^{W-}_{t+1}$, so stellt die Entnahme von $E_{t+1} = A^-_{t+1}$ eine garantierte Entnahme dar und führt nicht zum Storno des Vertrags. Dies ist allerdings durch den Fall c) korrekt abgedeckt.

[22] Vgl. Pioneer (2005) , Seite 36f.

[23] Vgl. Pioneer (2005), Seite 36f. Alternativ wird auch die Variante $G^{E+}_{t+1} = G^{E-}_{t+1} \cdot \frac{G^{W+}_{t+1}}{G^{W-}_{t+1}}$ angeboten.

Alternativ kann er das garantierte Verrentungskapital zu den bei Vertragsabschluss garantierten Konditionen verrenten. Bezeichnet man mit $\ddot{a}_{akt}$ und $\ddot{a}_{gar}$ die Rentenbarwerte, die zu den bei T aktuellen bzw. zu den bei Vertragsabschluss garantierten Rentenkonditionen gehören, so ist der Wert dieser Leistung gerade $G_T^{I+} \cdot \frac{\ddot{a}_{akt}}{\ddot{a}_{gar}}$. Ein finanzrationaler Kunde würde die garantierte Rente genau dann wählen, wenn $G_T^{I+} \cdot \frac{\ddot{a}_{akt}}{\ddot{a}_{gar}} > A_T^+$. Somit ergibt sich für einen finanzrationalen Kunden $L_T^I = \max\left\{A_T^+ ; G_T^{I+} \cdot \frac{\ddot{a}_{akt}}{\ddot{a}_{gar}}\right\}$.

Liegt sowohl eine GMAB als auch eine GMIB-Option vor, so gilt für einen finanzrationalen Kunden $L_T = \max\left\{L_T^A ; L_T^I\right\}$.

3.4 Wert eines Vertrags

Im Folgenden gehen wir stets davon aus, dass Sterblichkeit unabhängig von der Entwicklung des Finanzmarktes ist. Sei x_0 das Eintrittsalter der versicherten Person und bezeichne ${}_t p_{x_0}$ die Wahrscheinlichkeit eines x_0-jährigen, noch mindestens t Jahre zu überleben, und q_{x_0+t} die Wahrscheinlichkeit eines $(x_0 + t)$-jährigen, innerhalb des nächsten Jahres[24] zu sterben. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Tod zum Zeitpunkt $t+1$ eintritt, beträgt somit ${}_t p_{x_0} \cdot q_{x_0+t}$. Das rechnerische Höchstalter, also das kleinste Alter, das mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht überlebt werden kann, bezeichnen wir wie üblich mit ω.

3.4.1 Deterministisches Kundenverhalten

In einem ersten Schritt gehen wir davon aus, dass vom Kunden beeinflussbare Ereignisse (Entnahmen und Storno) deterministisch sind. Als *deterministische Strategie* bezeichnen wir einen Vektor $\bar{\xi} = (\xi_1 ;\ldots; \xi_T) \in \left(IR_+^\infty\right)^T$.[25] Wir nennen $\bar{\xi}$ auch *Entnahmevektor*, wobei ξ_t den Betrag angibt, der zum Ende des t-ten Jahres entnommen werden soll, sofern der Versicherte noch lebt und eine entsprechende Entnahme zulässig ist. Wenn eine Entnahme von ξ_t nicht zulässig ist, so wird der größtmögliche zulässige Betrag $E_t < \xi_t$ entnommen. Insbesondere falls keine GMWB-Option im Vertrag enthalten ist, wird somit der Betrag $E_t = \min\left\{\xi_t ; A_t^-\right\}$ entnommen. Storno zum Zeitpunkt t wird durch $\xi_t = \infty$ dargestellt.

Mit $\Psi = \Psi_1 \times \ldots \times \Psi_T \subset \left(IR_+^\infty\right)^T$ bezeichnen wir die Menge aller zulässigen deterministischen Strategien. Jede deterministische Strategie ist insbesondere $\boldsymbol{F_0}$-messbar.

[24] d.h. in unserem Modell genau zum Ende des nächsten Jahres

[25] Mit IR_+ bezeichnen wir die Menge aller nicht negativen reellen Zahlen (also inklusive der Null), ferner ist $IR_+^\infty = IR_+ \cup \{\infty\}$.

Wenn ein Versicherungsvertrag und eine deterministische Strategie vorgegeben sind, so liegen unter der Annahme, dass der Tod im Jahr $t \in \{1,2,\ldots,\omega - x_0\}$ eintritt, die Werte $L_T\left(t;\bar{\xi}\right)$, $W_T\left(t;\bar{\xi}\right)$ und $D_T\left(t;\bar{\xi}\right)$ für jede Entwicklung des Fondskurses S eindeutig fest. Der Wert des Vertrages bei $t = 0$ inklusive aller Optionen ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} V_0\left(\bar{\xi}\right) &= e^{-rT} \sum_{t=1}^{\omega-x_0} {}_{t-1}p_{x_0} \cdot q_{x_0+t-1} E_Q\left[L_T\left(t;\bar{\xi}\right) + W_T\left(t;\bar{\xi}\right) + D_T\left(t;\bar{\xi}\right)\right] \\ &= e^{-rT} \sum_{t=1}^{T} {}_{t-1}p_{x_0} \cdot q_{x_0+t-1} E_Q\left[L_T\left(t;\bar{\xi}\right) + W_T\left(t;\bar{\xi}\right) + D_T\left(t;\bar{\xi}\right)\right] \\ &\quad + {}_Tp_{x_0} \cdot E_Q\left[L_T\left(T+1;\bar{\xi}\right) + W_T\left(T+1;\bar{\xi}\right) + D_T\left(T+1;\bar{\xi}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

3.4.2 Probabilistisches Kundenverhalten

Unter probabilistischem Kundenverhalten verstehen wir den Fall, dass der Kunde gewisse vorgegebene Strategien mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ausübt. Wenn die deterministischen Strategien $\bar{\xi}^{(j)} = \left(\xi_1^{(j)};\ldots;\xi_T^{(j)}\right) \in \left(IR_+^{\infty}\right)^T$, $j = 1,2,\ldots,n$ und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_{\xi}^{(j)}$ gegeben sind ($\sum_{j=1}^{n} p_{\xi}^{(j)} = 1$), ergibt sich der Wert des Vertrags als

$$V_0 = \sum_{j=1}^{n} p_{\xi}^{(j)} V_0\left(\bar{\xi}^{(j)}\right). \tag{4}$$

Der Wert eines Vertrages unter probabilistischem Kundenverhalten lässt noch eine weitere Interpretation zu: Wenn ein Versicherungsunternehmen aus Erfahrungswerten Prognosen für die zukünftigen Häufigkeiten von Storni und Entnahmen im Bestand abgeleitet hat, und die entsprechenden relativen Häufigkeiten jedem Vertrag als Wahrscheinlichkeiten zuordnet, so ist die Summe der entsprechenden probabilistischen Vertragswerte gerade der Wert des Vertragsbestands aus Sicht des Versicherers unter der Annahme, dass die Prognose korrekt ist. Dieser Wert entspricht den Kosten für einen perfekten Hedge der entsprechenden Verpflichtungen, wenn sich die Versicherten verhalten wie erwartet. Das Risiko, dass das tatsächliche künftige Kundenverhalten von den Prognosen abweicht, ist in diesem Fall jedoch nicht abgesichert, vgl. Fußnote 13.

3.4.3 Stochastisches Kundenverhalten

Die Annahme von deterministischem oder probabilistischem Kundenverhalten, geht davon aus, dass das Storno- und Entnahmeverhalten der Kunden nicht von der Entwicklung des Kapitalmarkts und somit des Vertrags abhängt. Eine stochastische Kundenstrategie ist hingegen eine Strategie, bei der der Kunde abhängig von der zum Zeitpunkt t vorhandenen Information festlegt, ob und gegebenenfalls welchen Betrag er entnimmt bzw. ob er storniert.

Eine zulässige stochastische Kundenstrategie ist ein $\boldsymbol{F_t}$-messbarer Prozess $\boldsymbol{(X)}$, der abhängig vom Zustand des Systems den Entnahmebetrag festlegt: $\boldsymbol{X}\left(t, y_t^-\right) = E_t$, $t = 1,2,\ldots,T$.
Für jede stochastische Kundenstrategie $\boldsymbol{(X)}$ liegen unter der Annahme, dass der Tod im Jahr $t \in \{1,2,\ldots,\omega - x\}$ eintritt, die Werte $L_T(t;\boldsymbol{(X)})$, $W_T(t;\boldsymbol{(X)})$ und $D_T(t;\boldsymbol{(X)})$ für jede Entwicklung des Prozesses S eindeutig fest. Der Wert eines Vertrags ergibt sich somit zu

$$V_0\left(\boldsymbol{(X)}\right) = \sum_{t=0}^{\omega - x_0} {}_{t-1}p_{x_0} \cdot q_{x_0+t-1} \cdot e^{-rT} E_Q\left[L_T\left(t,\boldsymbol{(X)}\right) + W_T\left(t,\boldsymbol{(X)}\right) + D_T\left(t,\boldsymbol{(X)}\right)\right]. \tag{5}$$

Sei Ξ die Menge aller zulässigen stochastischen Kundenstrategien. Der Wert V_0 eines Vertrags unter der Annahme *finanzrationalen Kundenverhaltens* bezüglich Storno und Entnahmen ist dann gegeben durch

$$V_0 = \sup_{\boldsymbol{(X)} \in \Xi} V_0\left(\boldsymbol{(X)}\right). \tag{6}$$

3.5 Ein Beispiel

Zur Veranschaulichung der Vorgehensweise bei der Bewertung eines Vertrags betrachten wir einen einfachen Vertrag mit einer GMAB-Option.
Dem Kunden wird zu einem festgelegten Zeitpunkt $T = 10$ ein Mindest-Portfoliowert in Höhe der gezahlten Prämie garantiert, es gilt also $G_{10}^A = P$. Damit ist die Erlebensfallleistung des Kunden bei Überleben der 10-jährigen Versicherungsdauer gegeben durch

$$L_T = \max\left\{G_{10}^A ; A_{10}\right\} = \max\left\{P ; A_{10}\right\}.$$

Diese lässt sich zerlegen in eine sichere Zahlung P und den Payoff einer Call-Option auf das Underlying A mit Strike P, es gilt also

$$L_T = \max\left\{P ; A_{10}\right\} = P + \left[A_{10} - P\right]^+.$$

Wir gehen für dieses einfache Beispiel davon aus, dass der Kunde den Vertrag während der Laufzeit nicht kündigen kann und keine Entnahmen vornehmen kann. Damit gilt $W_{10} = 0$. Ferner werden in diesem Beispiel keine Todesfallgarantien gewährt, bei Tod im t-ten Jahr wird also lediglich das Fondsguthaben A_t ausbezahlt. Der Wert des fiktiven Todesfallkontos bei Ablauf unter der Annahme, dass der Tod im Jahr t eintritt, ist damit gegeben durch $D_{10} = A_t e^{(10-t)r}$.
Dann gilt für den Wert V_0 des Vertrags ohne Storno-Option (für $P = 1$)

$$\begin{aligned}
V_0\left(\bar{\xi} = \bar{0}\right) &= \sum_{t=1}^{10} {}_{t-1}p_{x_0} \cdot q_{x_0+t-1} \cdot e^{-10r} E_Q\left[A_t e^{(10-t)r}\right] + {}_{10}p_{x_0} \cdot e^{-10r} E_Q\left[P + \left[A_{10} - P\right]^+\right] \\
&= \sum_{t=1}^{10} {}_{t-1}p_{x_0} \cdot q_{x_0+t-1} \cdot E_Q\left[e^{-10r} S_t e^{(10-t)r - t\varphi}\right] + {}_{10}p_{x_0} \cdot e^{-10r} E_Q\left[1 + \left[A_{10} - 1\right]^+\right] \\
&= \sum_{t=1}^{10} {}_{t-1}p_{x_0} \cdot q_{x_0+t-1} \cdot e^{-t\varphi} + {}_{10}p_{x_0} \cdot \left(e^{-10r} + e^{-10\varphi} C_{0;10}\left(S_0 ; e^{10\varphi}\right)\right),
\end{aligned}$$

wobei $C_{0,10}\left(S_0 ; e^{10\varphi}\right)$ den Black-Scholes-Preis bei $t = 0$ einer Call-Option mit Laufzeit 10 Jahre auf das Underlying S mit Strike $e^{10\varphi}$ bezeichnet.

Im allgemeinen Fall sind die Kontrakte jedoch nur mit numerischen Methoden zu bewerten, die im nachfolgenden Abschnitt ausführlich erläutert werden.

4 Numerische Bewertung von Guaranteed Minimum Benefits

Im Folgenden stellen wir zwei Ansätze vor, die zur Bewertung der vorgestellten Guaranteed Minimum Benefits benutzt werden können. Da auf Grund der Pfadabhängigkeit der Optionen im Allgemeinen keine geschlossenen Formeln existieren, müssen numerische Methoden verwendet werden. Der in Abschnitt 4.1 vorgestellte Monte-Carlo Ansatz liefert mit relativ einfachen Mitteln schnelle und genaue Ergebnisse für deterministisches oder probabilistisches Kundenverhalten, sowie für eine vorgegebene $\boldsymbol{F_t}$ -messbare stochastische Kundenstrategie. Der Wert eines Vertrages unter der Annahme, dass sich Kunden hinsichtlich Storno und Entnahmen finanzrational verhalten (also das Supremum der Vertragswerte über alle $\boldsymbol{F_t}$-messbaren stochastischen Kundenstrategien), lässt sich hingegen mit Monte-Carlo Simulationen nicht oder nicht mit vertretbarem Rechenaufwand bestimmen. In diesen Fällen verwenden wir einen so genannten Diskretisierungsansatz, der in Abschnitt 4.2 ausführlich beschrieben wird. Der Diskretisierungsansatz basiert auf relativ komplexen mathematischen Methoden. An der zugehörigen Theorie nicht interessierte Leser können sich direkt den Ergebnissen in Abschnitt 5 zuwenden.

4.1 Monte-Carlo Simulation

Sei eine $\boldsymbol{F_t}$ -messbare Kundenstrategie[26] $\boldsymbol{(X)} : IR \times IR_+^8 \to IR$ gegeben. Die Rekursionsformel

$$A_{t+1}^- = A_t^+ \frac{S_{t+1}}{S_t} \cdot e^{-\varphi} = A_t^+ \cdot \exp\left\{\left(r - \varphi - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma z_{t+1}\right\}; \quad z_t \sim N(0,1) \text{ iid.}$$

erlaubt eine Generierung von zufälligen Realisierungen (Pfaden) a des Prozesses A mithilfe eines Zufallsgenerators, der unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen erzeugt (Monte-Carlo Simulation). Für jeden Vertrag mit Guaranteed Minimum Benefits ergibt sich mit den in Kapitel 3 beschriebenen Regeln für jeden simulierten Pfad $a^{(j)}$ des Kundenportfolios und für jeden möglichen Todeszeitpunkt t die Entwicklung aller Konten und Prozesse. Damit liegt der Wert zum Zeitpunkt T aller Leistungen des Vertrags $l_T^{(j)}(t,\boldsymbol{(X)}) + w_T^{(j)}(t,\boldsymbol{(X)}) + d_T^{(j)}(t,\boldsymbol{(X)})$ eindeutig fest.[27] Der Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ aller Leistungen ist in diesem Pfad gegeben durch

$$v_0^{(j)}(\boldsymbol{(X)}) = e^{-rT} \sum_{t=1}^{\omega - x_0} {}_{t-1}p_{x_0} \cdot q_{x_0+t-1} \left[l_T^{(j)}(t,\boldsymbol{(X)}) + w_T^{(j)}(t,\boldsymbol{(X)}) + d_T^{(j)}(t,\boldsymbol{(X)})\right].$$

[26] Eine $\boldsymbol{F_0}$-messbare, also deterministische Strategie $\bar{\xi}$ ist ein Spezialfall hiervon.

[27] Analog zur Bezeichnung a_t für eine Realisation von A_t, bezeichnen l_T, w_T und d_T Realisationen von L_T, W_T und D_T.

$V_0\left(\boldsymbol{(X)}\right)=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}V_0^{(j)}\left(\boldsymbol{(X)}\right)$ ist dann der Monte-Carlo Schätzer für den Wert des Vertrages, wobei J die Anzahl der Simulationen bezeichnet.[28]

Auf Grund der vielfältigen Entscheidungsmöglichkeiten des Kunden zu jedem der Jahresstichtage ist die Monte-Carlo Simulation jedoch nicht effizient genug, um einen Vertrag unter der Annahme finanzrationalen Kundenverhaltens zu bewerten.

4.2 Ein mehrdimensionaler Diskretisierungsansatz

Tanskanen und Lukkarinen (2004) stellen einen alternativen Bewertungsansatz vor. Ihre Lösung, die auf einer Diskretisierung des Bewertungsproblems basiert, ist zur Bewertung von Verträgen mit einer Storno-Option besonders geeignet. Wir erweitern und verallgemeinern ihren Ansatz in mehrerer Hinsicht: Zum einen lassen wir einen mehrdimensionalen Zustandraum zu, und weiten daher die Interpolationsschemata auf mehrere Dimensionen aus. Des Weiteren gibt es im Modell von Tanskanen und Lukkarinen (2004) keinerlei Kosten. Wir modifizieren das Modell so, dass die Garantiegebühr φ und die Stornogebühr s berücksichtigt werden können. Schließlich besteht eine Strategie in unserem Modell nicht nur aus der Entscheidung, ob storniert wird oder nicht. Stattdessen sind in jeder Periode innerhalb gewisser Grenzen beliebige Entnahmen möglich. Wir verallgemeinern den Ansatz daher auch dahin gehend, dass die optimale Strategie aus einer Vielzahl von Entnahmestrategien ausgewählt wird.

Wir beschreiben in diesem Abschnitt zuerst eine quasi analytische Integrallösung zur Bewertung von Versicherungsverträgen mit Guaranteed Minimum Benefits und stellen dann unseren Ansatz vor, wie man die entsprechenden Integrale näherungsweise über einen Diskretisierungsalgorithmus lösen kann.

Wir beschränken uns bei der folgenden Darstellung auf den Fall eines finanzrationalen Kunden. Für deterministisches oder probabilistisches Kundenverhalten sowie für eine vorgegebene stochastische Strategie ist die Vorgehensweise, insbesondere die Bestimmung der Funktion $\tilde{F}$ aus Abschnitt 4.2.3, analog.

4.2.1 Eine quasi-analytische Lösung

Der Wert V_t eines Vertrags zum Zeitpunkt t hängt vom Wert des Zustandsvektors $y_t=\left(A_t, W_t, D_t, G_t^A, G_t^I, G_t^D, G_t^W, G_t^E\right)$ zum Zeitpunkt t ab. Da sich die Zustandsvariablen mit Ausnahme von A_t zwischen den Jahrestagen deterministisch entwickeln, ist der Wertprozess eine Funktion der Zeit t, des aktuellen Kontostands A_t und des Zustandsvektors zum letzten Jahrestag $\lfloor t\rfloor^+$, also $V_t=V\left(t, A_t; y_{\lfloor t\rfloor}^+\right)$.

Zu den diskreten Zeitpunkten $t=1,2,\ldots,T$ unterscheiden wir zwischen dem Wert unmittelbar vor Auszahlung von Todesfallleistungen und Entnahmen $V_t^-=V\left(t, A_t^-; y_{t-1}^+\right)$ und dem Wert unmittelbar nach Auszahlung von Todesfallleistungen und Entnahmen $V_t^+=V\left(t, A_t^+, y_t^+\right)$.

Wenn die versicherte Person im Jahr $(t, t+1]$ nicht verstorben ist, legen die Regeln aus Abschnitt 3.3 bei vorgegebenem Entnahmebetrag E_{t+1} und bei Kenntnis von A_{t+1}^- die Entwicklung der Zustandsvariablen beim Übergang von t^+ nach $(t+1)^+$ eindeutig

[28] Für weiterführende Informationen zu Monte-Carlo Simulationen, vergleiche z.B. Glasserman (2003).

fest. Die Funktion, die diesen Übergang abbildet, bezeichnen wir mit $f_{E_{t+1}}\left(A_{t+1}^{-}, y_t^{+}\right) = \left(A_{t+1}^{+}, y_{t+1}^{+}\right)$. Analog bezeichnet $f_{-1}\left(A_{t+1}^{-}, y_t^{+}\right) = \left(A_{t+1}^{+}, y_{t+1}^{+}\right)$, die Funktion, die die Entwicklung der Zustandsvariablen für den Fall abbildet, dass die versicherte Person im Jahr $(t, t+1]$ verstorben ist.

Aus üblichen Arbitrage-Argumenten folgt, dass die Wertfunktion V_t innerhalb eines Jahres eine stetige Funktion in t ist. Durch Anwendung der Itô-Formel kann man ferner zeigen, dass die Wertfunktion V_τ für alle $\tau \in [t, t+1)$ eine auf Grund der Gebühren φ leicht abgewandelte Black-Scholes-Differentialgleichung erfüllt, d.h. es existiert eine Funktion $v : IR^{+} \times IR^{+} \to IR$ mit folgenden Eigenschaften: $V(\tau, a, y_t^{+}) = v(\tau, a)$ $\forall \tau \in [t, t+1)$, $a \in IR^{+}$ und v erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{d\tau} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 a^2 \frac{d^2 v}{d^2 a} + (r - \varphi) a \frac{dv}{da} - rv = 0 \tag{7}$$

mit vom Entnahmebetrag bei Überleben abhängiger Randbedingung $v(t+1, a) = (1 - q_{x_0+t})\ V\left(t+1, f_{E_{t+1}}\left(a, y_t^{+}\right)\right) + q_{x_0+t} V\left(t+1, f_{-1}\left(a, y_t^{+}\right)\right)$, $a \in IR^{+}$. Da diese Differentialgleichung lösbar ist, kann für bekanntes V_T durch folgende Rückwärtsiteration der Wertprozess des Vertrags und damit der Vertragswert V_0 bestimmt werden:

***t = T*:**

Zum Ende der Laufzeit ist der Wert des Vertrags gegeben durch $V\left(T, A_T^{+}, y_T^{+}\right) = L_T + W_T + D_T$.

***t = T-k*:**

Sei der Wert des Vertrags $V\left(T-k+1, A_{T-k+1}^{+}, y_{T-k+1}^{+}\right)$ im nächsten Jahr (T-k+1) für alle möglichen Belegungen der Zustandsvariablen bekannt. Dann ist der aktuelle Wert des Vertrags zurzeit (T-k) gegeben durch die Lösung $v(T-k, a)$ obiger Differentialgleichung (7) mit der Randbedingung

$$v(T-k+1, a) = \\ \left(1 - q_{x_0+T-k}\right) \sup_{E_{T-k+1} \in IR_{+}^{\infty}} V\left(T-k+1, f_{E_{T-k+1}}\left(a, y_{T-k}^{+}\right)\right) + q_{x_0+T-k} V\left(T-k+1, f_{-1}\left(a, y_{T-k}^{+}\right)\right).$$

Zur Lösung der Differentialgleichung (7) definieren wir $\upsilon := \frac{r-\varphi}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$, $\rho := \frac{1}{2}\sigma^2\upsilon^2 + r$ und $g(\tau, x) = e^{\sigma x \upsilon - \rho\tau} v\left(\tau, e^{\sigma x}\right)$. Mit diesen Bezeichnungen gilt $\lim_{\tau \to t+1} g(\tau, x) = e^{\sigma x \upsilon - \rho(t+1)} v\left(t+1, e^{\sigma x}\right)$ und g erfüllt die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{dg}{dt} = 0. \tag{8}$$

Eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit dieser Randbedingung ist somit gegeben durch[29]

$$g(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi((t+1)-\tau)}} \exp\left\{-\frac{(x-u)^2}{2((t+1)-\tau)}\right\} g(t+1, u)\, du. \tag{9}$$

[29] Vgl. Theorem 3.6 in Kapitel 4 von Karatzas und Shreve (1991).

Damit gilt

$$v(t,a) = e^{-\rho((t+1)-\tau)} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi((t+1)-\tau)\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\log\lambda)^2}{2((t+1)-\tau)\sigma^2}\right\} \lambda^{\upsilon-1} v_{t+1}(\lambda a) d\lambda \tag{10}$$

und mit der Substitution $\lambda(u) = \exp\left\{\sigma \cdot u + r - \varphi - \frac{1}{2}\sigma^2\right\}$ ergibt sich folgende quasi-analytische Lösung für $V\left(T-k, A_{T-k}, y_{T-k}^{+}\right)$:

$$\begin{aligned} & V\left(T-k, A_{T-k}, y_{T-k}^{+}\right) \\ & = e^{-r} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) \begin{bmatrix} \left(1-q_{x_0+T-k}\right) \sup\limits_{E_{T-k+1} \in IR_+^\infty} V\left(T-k+1, f_{E_{T-k+1}}\left(\lambda(u) A_{T-k}, y_{T-k}^{+}\right)\right) \\ + q_{x_0+T-k} V\left(T-k+1, f_{-1}\left(\lambda(u) A_{T-k}, y_{T-k}^{+}\right)\right) \end{bmatrix} du, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

4.2.2 Diskretisierung des Problems über einen Gitteransatz

Im Allgemeinen kann das Integral aus (11) nicht explizit berechnet werden. Wir verwenden deshalb numerische Methoden, um eine Approximation der Wertfunktion auf einem so genannten Gitter zu finden. Unter einem Gitter verstehen wir dabei das Folgende: Sei $Y_t \subseteq \left(IR_+^\infty\right)^8$ die Menge aller möglichen Werte des Zustandsvektors y_t. Sei ferner für jede der acht Zustandsvariablen eine endliche Menge möglicher Werte gegeben, die wir als Gitterbasiswerte bezeichnen. Sofern das Kreuzprodukt dieser acht Mengen eine Teilmenge von Y_t darstellt, bezeichnen wir dieses Kreuzprodukt mit $Git_t \subseteq Y_t$ und nennen es ein Y_t-Gitter oder kurz Gitter. Ein Element von Git_t nennen wir einen Gitterpunkt. Für gegebene Gitter[30] Git_t iterieren wir die Auswertung rückwärts, beginnend bei $t = T$, wobei die Endbedingung den Wert der Wertfunktion F für jeden Gitterpunkt vorgibt:

$$V(T, A_T, y_T) = L_T + W_T + D_T, \ \forall y_T \in Git_T.$$

Wir führen den oben beschriebenen Iterationsschritt T mal durch und erhalten so den Wert des Vertrags zu jedem ganzzahligen Zeitpunkt auf jedem Gitterpunkt und insbesondere auch den Wert des Vertrags V_0 bei $t = 0$. Innerhalb jedes Schrittes ist dabei für jeden Gitterpunkt das Intergral (11) mit numerischen Methoden zu approximieren. Die Vorgehensweise wird im Folgenden erläutert.

4.2.3 Approximative Berechnung des Integrals

Wir definieren für $a \in IR_+$ und gegebene Zustandsvariablen y_{T-k}^{+} die Funktion

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_{T-k+1}\left(a, y_{T-k}^{+}\right) \\ & = \left(1-q_{x_0+T-k}\right) \sup_{E_{T-k+1} \in IR_+^\infty} V\left(T-k+1, f_{E_{T-k+1}}\left(a, y_{T-k}^{+}\right)\right) + q_{x_0+T-k} V\left(T-k+1, f_{-1}\left(a, y_{T-k}^{+}\right)\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Damit ist (11) äquivalent zu

[30] In unseren numerischen Auswertungen ist Git_t unabhängig von t.

$$V\left(T-k, A_{T-k}, y_{T-k}^{+}\right)=e^{-r} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) \tilde{F}_{T-k+1}\left(\lambda(u) A_{T-k}, y_{T-k}^{+}\right) du \text{ für } y_{T-k}^{+} \in Git_{T-k},$$

mit $\lambda(u)=\exp\left\{\sigma \cdot u+r-\varphi-\frac{1}{2} \sigma^2\right\}$ wie oben definiert.

Zur approximativen Berechnung dieses Integrals auf der Menge der Gitterpunkte Git_{T-k} werten wir die Funktion $\tilde{F}_{T-k+1}\left(a, y_{T-k}^{+}\right)$ für jeden Gitterpunkt $y_{T-k}^{+} \in Git_{T-k}$ in der Variablen a auf einer diskreten Zerlegung der positiven reellen Zahlen aus und interpolieren zwischen den Zerlegungspunkten linear.

Sei also ein Gitterpunkt $y_{T-k}^{+} \in Git_{T-k}$ vorgegeben. Des Weiteren gibt man sich einen Maximalwert $A_{\max} > 0$ vor und teilt das Intervall $[0, A_{\max}]$ durch die Zerlegung $\alpha_m := \frac{A_{\max}}{M} m,\ m \in \{0,1,2,\ldots,M\}$ in M Teilintervalle auf. Bezeichne nun $\gamma_m = \tilde{F}_{T-k+1}\left(\alpha_m, y_{T-k}^{+}\right)$. Dann kann für jedes $a \in IR_{+}$ die Funktion $\tilde{F}_{T-k+1}\left(a, y_{T-k}^{+}\right)$ wie folgt durch eine stückweise lineare Funktion approximiert werden:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{T-k+1}\left(a, y_{T-k}^{+}\right) &\approx \sum_{m=0}^{M-1}\left[\gamma_m+\frac{a-\alpha_m}{\alpha_{m+1}-\alpha_m}\left(\gamma_{m+1}-\gamma_m\right)\right] \cdot \mathrm{I}_{[\alpha_m, \alpha_{m+1})}(a) \\
&\quad +\left[\gamma_{M-1}+\frac{a-\alpha_{M-1}}{\alpha_M-\alpha_{M-1}}\left(\gamma_M-\gamma_{M-1}\right)\right] \cdot \mathrm{I}_{[A_{\max}, \infty)}(a) \\
&= \sum_{m=0}^{M-1}\left[b_{m,1} \cdot a+b_{m,0}\right] \cdot \mathrm{I}_{[\alpha_m, \alpha_{m+1})}(a)+\left[b_{M,1} \cdot a+b_{M,0}\right] \cdot \mathrm{I}_{[A_{\max}, \infty)}(a),
\end{aligned}$$

mit $b_{m,0}=\gamma_m-m\left(\gamma_{m+1}-\gamma_m\right)$, $m=0,\ldots,M-1$; $b_{M,0}=b_{M-1,0}$ und $b_{m,1}=\frac{M}{A_{\max}}\left(\gamma_{m+1}-\gamma_m\right)$, $m=0,\ldots,M-1$; $b_{M,1}=b_{M-1,1}$. Ferner bezeichnet I hierbei die Indikatorfunktion.

Somit ergibt sich

$$V\left(T-k, a, y_{T-k}^{+}\right) \approx \sum_{m=0}^{M}\left[a \cdot e^{-\varphi} b_{m,1}\left(\Phi\left(u_{m+1}-\sigma\right)-\Phi\left(u_m-\sigma\right)\right)+b_{m,0} e^{-r}\left(\Phi\left(u_{m+1}\right)-\Phi\left(u_m\right)\right)\right],$$

wobei $u_0=\infty$, $u_m=\frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{A_{\max} \cdot m}{M \cdot a}\right)-\frac{r}{\sigma}+\frac{\varphi}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}$ und $u_{M+1}=\infty$.

Definiert man $b_{-1,1}=b_{-1,0}=0$, so gilt

$$\begin{aligned}
&V\left(T-k, A_{T-k}, y_{T-k}^{+}\right) \\
&\approx \sum_{m=0}^{M}\left[A_{T-k} \cdot e^{-\varphi}\left(b_{m,1}-b_{m-1,1}\right)\left(1-\Phi\left(u_m-\sigma\right)\right)+e^{-r}\left(b_{m,0}-b_{m-1,0}\right)\left(1-\Phi\left(u_m\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Zur Approximation des Integrals genügt es also, die Werte $\gamma_m=\tilde{F}_{T-k+1}\left(\alpha_m, y_{T-k}^{+}\right)$, $m \in \{0,1,2,\ldots,M\}$ zu bestimmen.[31] Dazu ist allerdings auf Grund

[31] Dazu muss die Funktion $f_{E_{T-k+1}}$ für alle möglichen Entnahmenbeträge E_{T-k+1} ausgewertet werden. In der praktischen Umsetzung lassen wir nur endlich viele Werte für E_{T-k+1} im jeweils relevanten Bereich zu.

der Definition von $\widetilde{F}_{T-k+1}$, vgl. (12), die Funktion V nach dem Übergang der Zustandsvariablen von $(T-k)^{+}$ nach $(T-k+1)^{+}$ auszuwerten. Da die Zustandsvariablen und damit die Argumente dieser Funktion nach eventuell stattfindenden Kundenaktionen in der Regel nicht mehr auf dem Gitter Git_{T-k+1} liegen, muss $V\left(T-k+1, A_{T-k+1}, y_{T-k}^{+}\right)$ unter Umständen durch Interpolation aus den Werten der umliegenden Gitterpunkte approximiert werden.
Diese Approximation ist im Allgemeinen auf Grund der hohen Dimension des Problems sehr rechenzeit- und speicherintensiv. In den meisten praxisrelevanten fällen lässt sich diese jedoch reduzieren, da nicht alle Zustandsvariablen benötigt werden. Für alle Vertragskonstellationen, die wir in Abschnitt 5 analysieren, kann das Bewertungsproblem auf maximal vier Dimensionen reduziert werden. Dies zeigen wie in Abschnitt 4.2.4. Für das maximal 4-dimensionale Problem interpolieren wir dann in jeder Dimension linear zwischen den benachbarten Gitterbasiswerten.

4.2.4 Reduktion der Dimensionalität

Die Genauigkeit obiger Berechnung hängt stark von der Feinheit des verwendeten Gitters ab. Allerdings nimmt bei gegebener Feinheit die Anzahl der Gitterpunkte und somit die Rechenzeit mit wachsender Dimensionalität des Problems stark zu. Eine Reduktion der Dimensionalität führt daher zu einem erheblichen Effizienzgewinn.
Unserem Modell liegt wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben ein 8-dimensionales Gitter zu Grunde. Das Todesfallkonto D_t ist jedoch stets gleich Null, so lange noch keine Todesfallleistung bezahlt wurde. Danach sind alle anderen Konten (mit Ausnahme des Entnahmekontos) gleich Null. Dadurch ist die Dimensionalität stets um eins geringer als die Anzahl der benötigten Zustandsvariablen, also höchstens 7.
Wenn nicht alle möglichen Garantien gleichzeitig vorliegen, werden auch nicht alle Zustandsvariablen benötigt, was die Anzahl der Dimensionen weiter reduziert. In Tabelle 1 sind alle Kombinationen von Garantien aufgeführt, die wir in Abschnitt 5 betrachten werden. Wir geben ferner die jeweils relevanten Zustandsvariablen an. Hierbei ist zu beachten, dass bei den GMWB-Varianten ohne Step-Up stets $G_t^E = x_W \cdot G_t^W$ gilt. Daher wird dort die Zustandsvariable $G_t^E = x_W \cdot G_t^W$ nicht benötigt.
Da die Dimension des zugehörigen Gitters stets um eins geringer ist als die Anzahl der Zustandsvariablen, lässt sich die Dimension des Problems für alle praxisrelevanten Fälle auf höchstens 4 reduzieren.

Betrachtete Optionen	Benötigte Zustandsvariablen	Dimension
nur GMAB	A_t , D_t , W_t , G_t^A	3
nur GMIB	A_t , D_t , W_t , G_t^I	3
nur GMDB	A_t , D_t , W_t , G_t^D	3
nur GMWB ohne Step-Up	A_t , D_t , W_t , G_t^W	3
nur GMWB mit Step-Up	A_t , D_t , W_t , G_t^W , G_t^E	4
GMAB und GMDB	A_t , D_t , W_t , G_t^A , G_t^D	4
GMIB und GMDB	A_t , D_t , W_t , G_t^I , G_t^D	4
GMWB ohne Step-Up und GMDB	A_t , D_t , W_t , G_t^W , G_t^D	4

Tabelle 1: Dimension des Bewertungsproblems für verschiedene Kombinationen von betrachteten Garantien

Trotz dieser Reduktion der Dimensionalität ist der zugehörige Algorithmus sehr rechenzeitintensiv. Die Bestimmung eines Vertragswertes V_0 dauert im vierdimensionalen Fall für einen Vertrag mit 25 Jahren Laufzeit je nach Parameterkonstellation 15 bis 40 Stunden.

5 Ergebnisse

Mit den in Abschnitt 4 vorgestellten Methoden können wir nun den Wert eines Vertrags mit Guaranteed Minimum Benefits bei vorgegebener Garantiegebühr φ bestimmen. Wir nennen einen Vertrag fair, wenn sein Wert gleich der bezahlten Prämie ist, wenn also die Gleichgewichtsbedingung $P = V_0 = V_0(\varphi)$ erfüllt ist. Wir bezeichnen die jährliche Gebühr φ, die die Gleichgewichtsbedingung erfüllt, als faire Garantiegebühr.

Wir bestimmen im Folgenden die faire Garantiegebühr für verschiedene Verträge mit Guaranteed Minimum Benefits unter der Annahme verschiedener Kundenstrategien. Wir halten dabei folgende Parameter fest: Wir setzen für den risikolosen Zins r = 4% und für die Volatilität σ = 15%. Ferner betrachten wir einen Vertrag mit Laufzeit T=25 Jahren, für einen bei Vertragsabschluss x_0 = 40-jährigen Mann gegen einen Einmalbeitrag von P = 10.000 Geldeinheiten. Für Entnahmen, die nicht im Rahmen einer GMWB-Option garantiert sind, also insbesondere auch für Storno, gehen wir von einer Entnahme- bzw. Stornogebühr von s = 5% des entnommenen Betrags aus. Wir verwenden Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung aus der aktuellen Sterbetafel der Deutschen Aktuarvereinigung (DAV 2004 R).

Wir betrachten bei Verträgen ohne GMWB-Option jeweils zwei Strategien für das Kundenverhalten: Bei Strategie 1 gehen wir davon aus, dass der Kunde während der Laufzeit des Vertrags weder Entnahmen vornimmt noch storniert. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.4 handelt es sich hierbei um eine deterministische Strategie. Wir betrachten ferner eine probabilistische Strategie 2. Hierbei gehen wir davon aus, dass im ersten Jahr nach Vertragsbeginn der Kunde den Vertrag mit Wahrscheinlichkeit 5% storniert, in den Jahren 2 und 3 je mit Wahrscheinlichkeit 3% und danach mit Wahrscheinlichkeit 1% pro Jahr. Sonstige Entnahmen werden nicht vorgenommen. Schließlich betrachten wir (auf Grund der beschriebenen Rechenzeitproblematik nur für einige ausgewählte Fälle) als dritte Strategie noch den

Fall eines finanzrationalen Kunden, der in jedem Jahr diejenige Aktion (Entnahme oder Storno) durchführt, die den Wert der Option maximiert.
Bei Verträgen mit GMWB-Option betrachten wir zur Berücksichtigung der garantierten Entnahmen andere Kundenstrategien, die wir in Abschnitt 5.2.4 definieren.

5.1 Bestimmung der fairen Garantiegebühr

Zur Erläuterung, wie die faire Garantiegebühr bestimmt wird, betrachten wir zunächst beispielhaft drei Verträge mit GMAB-Option. Bei Vertrag 1 entspricht der garantierte Wert bei Ablauf gerade dem Einmalbeitrag (Beitragsgarantie), bei Vertrag 2 einer Ratchet Benefit Base (jährliche Höchststandsabsicherung) und bei Vertrag 3 einer Roll-Up Benefit Base (Garantieverzinsung) mit Roll-Up Rate $i = 6\%$. Abbildung 1 zeigt für diese Verträge den Wert $V_0(\varphi)$ abhängig von der Garantiegebühr unter Kundenstrategie 1 (weder Entnahmen noch Storno).

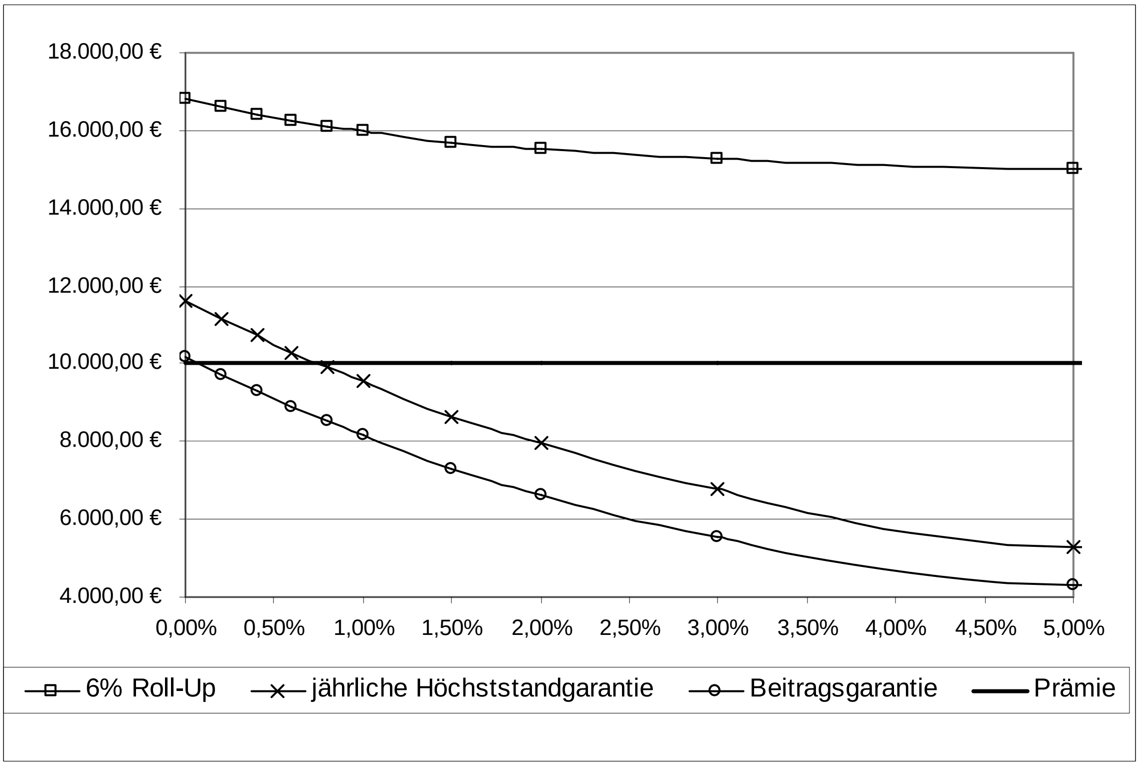

Abbildung 1: Vertragswert als Funktion der Garantiegebühr für verschiedene Verträge mit GMAB-Option

Derjenige Wert von φ, für den $V_0(\varphi)$ dem Einmalbeitrag entspricht, ist die faire Garantiegebühr. Für Vertrag 1 mit Beitragsgarantie ist dies $\varphi = 0{,}07\%$. Für Vertrag 2 (jährliche Höchststandsabsicherung) beträgt diese Gebühr 0,76%. Für Vertrag 3 mit Garantieverzinsung existiert hingegen offensichtlich keine faire Garantiegebühr. Dies bedeutet, dass für diesen Vertrag bereits der Wert der garantierten Ablaufleistung den Einmalbeitrag übersteigt. Derartige Optionen können daher in der Praxis nur finanziert werden, wenn die Garantiekosten aus anderen Vertragskosten subventioniert werden oder wenn nicht-finanzrationales Verhalten der Versicherten den Optionswert reduziert.

5.2 Ergebnisse für verschiedene Verträge

5.2.1 Verträge mit GMDB-Optionen

Wir betrachten drei verschiedene Verträge mit GMDB-Option, die sich ausschließlich in der Todesfallleistung unterschieden: Diese beträgt stets das Maximum aus dem aktuellen Guthaben und der garantierten Todesfallleistung, welche bei den drei Verträgen gerade dem Einmalbeitrag, einer Ratchet Benefit Base (jährliche Höchststandsabsicherung) bzw. einer Roll-Up Benefit Base mit Roll-Up Rate $i = 6\%$ entspricht. Die Verträge beinhalten neben diesen Todesfallgarantien keine weiteren Garantien. Tabelle 2 zeigt die faire Garantiegebühr für diese drei Verträge unter den oben definierten Strategien.

Vertrag / Strategie	Beitragsgarantie	Höchststand	6% Roll-Up
1: Weder Storno noch Entnahmen	0,01%	0,04%	0,14%
2: Bekannte Stornowahrscheinlichkeit	< 0%	< 0%	0,05%

Tabelle 2: Faire Garantiegebühr für verschiedene Verträge mit GMDB-Option unter verschiedenen Kundenstrategien

Unter der Annahme, dass die Kunden weder stornieren noch Entnahmen vornehmen (Strategie 1), ist die faire Gebühr für alle drei betrachteten Todesfallgarantien sehr gering. Der Unterschied zwischen der Gebühr für eine Beitragsrückgewähr bei Tod (0,01%) und der Gebühr für eine jährlich um 6% steigende Todesfallleistung (0,14%) ist sehr hoch.

Geht man von bekannten Stornowahrscheinlichkeiten aus, so reduziert sich die faire Garantiegebühr stark, da die Stornogebühren zur Finanzierung der Garantien verwendet werden können. Für die Verträge mit Beitrags- oder Höchststandsgarantie werden die Kosten der Garantien sogar durch die Stornogebühren überkompensiert, sodass der Vertragswert selbst dann unter dem Einmalbeitrag liegt, wenn keine Garantiegebühr erhoben wird.

Unsere Ergebnisse bestätigen somit die Resultate von Milevsky und Posner (2001), die feststellen, dass die im Markt vorzufindenden Preise für garantierte Todesfallleistungen deutlich über dem fairen Wert dieser Garantien liegen.

Die fairen Garantiegebühren sind deswegen so gering, weil die Auszahlung der Leistung nur durch Tod ausgelöst werden kann. Ein finanzrationales Ausüben der Option immer dann, wenn sie im Geld ist, ist nicht möglich. Der einzige finanzrationale Handlungsspielraum des Kunden besteht darin, den Vertrag dann zu stornieren, wenn die Option weit aus dem Geld ist. In diesem Fall vermeidet man durch Storno die zukünftigen Gebühren für eine Option, aus der voraussichtlich keine Leistung zu erwarten ist. Storno ist also im Wesentlichen immer dann sinnvoll, wenn der aktuelle Wert der Option zuzüglich der eventuell anfallenden Stornogebühr geringer ist als der Wert der zukünftig noch zu bezahlenden Garantiegebühren. Da die Stornogebühr (s=5%) im Verhältnis zur Garantiegebühr relativ hoch ist, ist Storno allerdings nur sehr selten optimal. Daher unterscheiden sich die Vertragswerte unter finanzrationaler Kundenstrategie bei allen berechneten Konstellationen praktisch nicht von den Werten bei Strategie 1. Bei geringerer Stornogebühr wird die Auswirkung von finanzrationalem Kundenverhalten hingegen deutlich größer.

5.2.2 Verträge mit GMAB-Optionen

Wir betrachten drei Verträge mit GMAB-Optionen. Die entsprechenden Garantieleistungen sind wieder Beitragsrückgewähr, jährliche Höchststandsabsicherung bzw. eine 6% Roll-Up Benefit Base. Den Wert dieser Verträge unter Strategie 1 haben wir bereits in Abbildung 1 als Funktion der Garantiegebühr gezeigt. Die faire Garantiegebühr unter beiden oben definierten Strategien findet sich in Tabelle 3. In den Spalten „mit DB" ist ferner jeweils die faire Garantiegebühr angegeben für den Fall, dass der jeweilige Vertrag zusätzlich eine GMDB-Option mit 6% Roll-Up Rate beinhaltet.

Strategie \ Vertrag	Beitragsgarantie		Höchststand		6% Roll-Up	
	ohne DB	**mit DB**	**ohne DB**	**mit DB**	**ohne DB**	**mit DB**
1: Weder Storno noch Entnahmen	0,07%	0,23%	0,76%	0,94	---	---
2: Bekannte Stornowkt.	< 0%	0,12%	0,57%	0,74%	---	---

Tabelle 3: Faire Garantiegebühr für verschiedene Verträge mit GMAB-Option unter verschiedenen Kundenstrategien

Der Unterschied zwischen den drei betrachteten Erlebensfallgarantien ist sehr groß. Die fairen Garantiegebühren bei einer Beitragsgarantie liegen stets unter 0,25%, bei einer Höchststandsgarantie hingegen stets über 0,5%. Darüber hinaus ist die faire Gebühr jeder Höchststandsgarantie mindestens vier Mal so hoch wie die der entsprechenden Beitragsgarantie. Die Roll-Up Garantie ist selbst unter den angenommen Storno-wahrscheinlichkeiten aus Strategie 2 nicht darstellbar.
Die zusätzliche Garantiegebühr für die Hinzunahme einer GMDB-Option übersteigt in allen hier betrachteten Fällen die faire Gebühr für die bloße Todesfallgarantie aus Tabelle 2. Insbesondere reduziert sich diese zusätzliche Garantiegebühr durch Storno fast nicht.
Unsere Berechnungen haben ferner ergeben, dass finanzrationales Verhalten auch den Wert der hier betrachteten Verträge mit GMAB-Optionen nur unwesentlich beeinflusst. Im Fall der Beitragsgarantie ist Storno wegen der hohen Stornogebühr und der relativ geringen Garantiegebühr nur selten vorteilhaft, analog zu den in Abschnitt 5.2.1 betrachteten GMDB-Optionen. Bei der Höchststandsgarantie wird die Garantie jährlich dem aktuellen Fondsguthaben angepasst. Die Garantiesumme ist somit zu jedem Jahrestag mindestens so hoch wie das Fondsguthaben, sodass die entsprechende Option nicht aus dem Geld sein kann.

5.2.3 Verträge mit GMIB-Optionen

Die GMIB-Option gibt dem Kunden die Möglichkeit, die Garantieleistung zu bereits bei $t = 0$ garantierten Rentenfaktoren zu verrenten. Die Werthaltigkeit der Garantie bei Ablauf hängt neben dem Verhältnis von Fondsguthaben zu Garantieleistung auch stark vom Unterschied zwischen den bei Vertragsabschluss garantierten Rentenfaktoren und den am Ende der Laufzeit aktuellen Rentenfaktoren ab. Der Versicherer legt die garantierten Rentenfaktoren in der Regel konservativ fest, sodass bei

Vertragsabschluss davon auszugehen ist, dass der Quotient der zugehörigen Rentenbarwerte $\ddot{a} := \frac{\ddot{a}_{akt}}{\ddot{a}_{gar}} < 1$ ist. Sofern die Langlebigkeit während der Vertragslaufzeit jedoch stärker zunimmt als erwartet, kann dieser Quotient unter Umständen stark von den angenommenen Werten abweichen.
Wir betrachten im Folgenden drei Verträge mit GMIB-Option (Beitragsgarantie, jährliche Höchststandsabsicherung und 6% Roll-Up) unter verschiedenen Annahmen für den Wert $\ddot{a}$. Die entsprechenden fairen Garantiegebühren finden sich in Tabelle 4.
Man beachte, dass wir zwar davon ausgehen, dass die Kunden sich während der Vertragslaufzeit nach einer der oben definierten Strategien (weder Storno noch Entnahmen bzw. bekannte Stornowahrscheinlichkeiten) verhalten. Wir unterstellen jedoch dass die Kunden bei T die Option immer ausüben, wenn sie im Geld ist. Unter der Annahme, dass ein gewisser Prozentsatz der Kunden selbst dann das Kapital wählt, wenn die Option im Geld ist, reduziert sich die faire Garantiegebühr.

Strategie \ Vertrag		Beitragsgarantie		Höchststand		6 % Roll-Up	
		ohne DB	**mit DB**	**ohne DB**	**mit DB**	**ohne DB**	**mit DB**
1: Weder Storno noch Entnahmen	**$\ddot{a}$=1,2**	0,14%	0,31%	1,55%	1,83%	---	---
	$\ddot{a}$=1,0	0,07%	0,23%	0,76%	0,94%	---	---
	$\ddot{a}$=0,8	0,03%	0,18%	0,25%	0,40%	---	---
	$\ddot{a}$=0,6	0,01%	0,16%	0,05%	0,19%	2,32%	3,76%
2: Bekannte Storno-wahrschein-lichkeit	**$\ddot{a}$=1,2**	0,04%	0,18%	1,24%	1,40%	---	---
	$\ddot{a}$=1,0	< 0%	0,12%	0,57%	0,74%	---	---
	$\ddot{a}$=0,8	< 0%	0,10%	0,15%	0,29%	> 4%	> 4%
	$\ddot{a}$=0,6	< 0%	0,08%	< 0%	0,11%	1,45%	1,88%

Tabelle 4: Faire Garantiegebühr für verschiedene Verträge mit GMIB-Option unter verschiedenen Kundenstrategien

Offensichtlich stimmen für $\ddot{a} = 1$ die fairen Garantiegebühren mit denen der entsprechenden GMAB-Verträge überein. Der Wert der Garantie hängt ferner stark vom Quotienten $\ddot{a}$ ab. Wenn dieser von den bei Vertragsabschluss getroffenen Annahmen abweicht, kann dies die faire Garantiegebühr um ein Vielfaches verändern. Schätzungen über zukünftige Rentenfaktoren sind mit großer Unsicherheit behaftet, wie beispielsweise der Unterschied zwischen den DAV-Sterbetafeln 1994 R und 2004 R eindrucksvoll belegt. Die starke Abhängigkeit der Optionswerte von $\ddot{a}$ stellt somit ein hohes Risiko für Versicherer dar, welches mit derzeit existierenden Finanzinstrumenten nicht abgesichert werden kann.
Der Unterschied zwischen den fairen Garantiegebühren ohne und mit Storno ist ebenfalls relativ hoch. Eine mögliche Abweichung der tatsächlichen von den kalkulierten Stornowahrscheinlichkeiten stellt für Versicherer, die Storno beim Pricing der Garantien berücksichtigten, somit ebenfalls ein signifikantes Risiko dar.
Der Unterschied zwischen den drei Varianten ist ähnlich stark ausgeprägt wie bei den GMAB-Optionen. Wenn man davon ausgeht, dass Kunden nicht stornieren, ist die Garantie im Roll-Up Fall für $\ddot{a} \geq 0{,}8$ nicht finanzierbar. Selbst für $\ddot{a} = 0{,}6$ liegt die faire Garantiegebühr mit 2,32% etwa beim dreifachen des Preises, zu dem derartige Optionen derzeit angeboten werden. Da die faire Gebühr auch unter Berücksichtigung

von Storno für $\ddot{a} = 0{,}6$ rund doppelt so hoch ist wie die derzeit am Markt offerierten Gebühren, kann diese Abweichung nicht allein damit erklärt werden, dass Versicherer bei der Kalkulation der Garantien Stornowahrscheinlichkeiten berücksichtigen. Vielmehr ist davon auszugehen, dass Versicherer unterstellen, dass sich manche Kunden bei der Verrentung nicht finanzrational verhalten, also die Option selbst dann nicht ausüben, wenn sie im Geld ist. Eine derartige Annahme kann bei GMAB-Optionen naturgemäß nicht getroffen werden, da diese bei Fälligkeit automatisch ausgeübt werden. Daher werden GMAB-Optionen in der Regel auch nur mit Beitragsgarantie angeboten, wogegen bei GMIB-Optionen die hier analysierte Roll-Up Variante vorherrscht.
Aus den in Abschnitt 5.2.2 erläuterten Gründen ist der Unterschied zwischen Strategie 1 und finanzrationalem Kundenverhalten sowohl im Fall der Beitragsgarantie als auch im Fall der Höchststandsgarantie vernachlässigbar. Die faire Gebühr im Roll-Up Fall für $\ddot{a} = 0{,}6$ steigt hingegen unter der Annahme von finanzrationalem Kundenverhalten von 2,32% auf über 4%. In diesem Fall ist es nämlich optimal zu stornieren, wenn die entsprechende Option aus dem Geld ist (d.h. einen geringen Wert aufweist), da die durch Storno vermiedenen künftigen Garantiegebühren den Stornoabschlag überkompensieren.

5.2.4 Verträge mit GMWB-Optionen

Wir betrachten einen Vertrag mit GMWB-Option, bei dem der insgesamt garantierte Entnahmebetrag gerade dem Einmalbeitrag entspricht. Der jährliche garantierte Entnahmebetrag beträgt 7% des Einmalbeitrags. Diesen Vertrag analysieren wir einmal ohne zusätzliche GMDB-Option und einmal mit zusätzlicher GMDB-Option (6% Roll-Up). Daneben betrachten wir eine Step-Up Variante dieses Vertrags: Nach 5 bzw. 10 Jahren erhöht sich der insgesamt garantierte Entnahmebetrag um jeweils 10%, sofern bis dahin noch keinen Entnahmen vorgenommen wurden.
Wir gehen von folgenden Kundenstrategien aus: Bei Strategie 1 entnimmt der Kunde 14 Jahre lang 7% des insgesamt garantierten Entnahmebetrags, beginnend ab Jahr j. Danach wird der Vertrag storniert. Für den Vertrag ohne Step-Up ist j=1, der Kunde beginnt also sofort mit der garantierten Entnahme. Für den Vertrag mit Step-Up betrachten wir die Fälle j=1, j=6 sowie j=11, bei denen der Kunde also entweder sofort oder unmittelbar nach einer Erhöhung mit den Entnahmen beginnt. Der Fall j=1 bei der Step-Up Variante liefert natürlich dieselbe faire Gebühr wie der Fall j=1 beim Produkt ohne Step-Up.
Daneben betrachten wir folgende stochastische Strategie: Der Kunde entnimmt 7% des insgesamt garantierten Entnahmebetrags genau dann, wenn das aktuelle Guthaben unter dem insgesamt noch für garantierte Entnahmen zur Verfügung stehenden Betrag liegt, wenn also $A_t < G_t^W$. Sobald $G_t^W = 0$ ist, wird der Vertrag storniert. Dies ist eine nahe liegende Strategie für einen Kunden, der den Wert seines Vertrages intuitiv, d.h. ohne detaillierte Kenntnisse aus der Optionspreistheorie, zu optimieren versucht.
Die fairen Garantiegebühren für diese Verträge und Strategien sind in Tabelle 5 dargestellt.

Vertrag / Strategie	Ohne Step-Up	Mit Step-Up	Ohne Step-Up, mit DB
1: Entnahme von 700 p.a., beginnend ab Jahr j=1, 6 oder 11	j=1: 0,19%	j=1: 0,19%	0,23%
		j=6: 0,15%	
		j=11: 0,14%	
2: Entnahme von 700, falls $A_T > G_T^W$.	0,19%	0,2%	0,28%

Tabelle 5: Faire Garantiegebühr für verschiedene Verträge mit GMWB-Option unter verschiedenen Kundenstrategien

Es fällt auf, dass der Unterschied zwischen den beiden betrachteten Strategien extrem gering ist. Ferner ist es bei der Step-Up Variante in der Regel nicht sinnvoll, die Step-Up Zeitpunkte abzuwarten.
Die Zusatzgebühr für den Einschluss einer GMDB-Option ist hier wesentlich geringer als bei den GMIB- oder GMAB-Produkten. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass durch die laufenden Entnahmen auch die Todesfallleistungen reduziert werden. Bei Strategie 2 ist die zusätzliche Gebühr für den Todesfallschutz höher, da im Mittel weniger Entnahmen durchgeführt werden als bei Strategie 1.
Die fairen Gebühren für die betrachteten Strategien liegen unter dem Preis, zu dem derartige Optionen derzeit angeboten werden. Die faire Garantiegebühr für finanzrationales Kundenverhalten ist jedoch deutlich höher. Dies ist damit zu erklären, dass der Kunde bei GMWB-Optionen sehr viele Wahlmöglichkeiten hat, sodass die optimale Strategie in der Regel mit einfachen Strategien nicht gut angenähert werden kann. Für den Vertrag ohne Step-Up ist die faire Garantiegebühr für finanzrationales Kundenverhalten mindestens doppelt so hoch wie unter den betrachteten Strategien. Milevsky und Salisbury (2004) errechnen noch höhere Gebühren. Die Autoren verwenden jedoch insbesondere eine Stornogebühr in Höhe von lediglich 1%. Auch in unserem Modell weisen die Ergebnisse eine starke Abhängigkeit von der Stornogebühr auf: Für s=0 liegt die faire Garantiegebühr im finanzrationalen Fall ohne Step-Up deutlich über 1%.
Abschließend analysieren wir noch die Abhängigkeit der Garantiegebühr vom jährlich garantierten Entnahmebetrag für den Vertrag ohne Step-Up Variante. Neben dem oben betrachteten Fall x_W=7% des Einmalbeitrags betrachten wir x_W=5% bzw. 9%. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6 dargestellt.

Vertrag / Strategie	x_W=5%	x_W =7%	x_W =9%
1: Entnahme von 700 p.a., beginnend ab Jahr 1	0,05%	0,19%%	0,38%

Tabelle 6: Sensitivität der fairen Garantiegebühr bezüglich des jährlich garantierten Entnahmenbetrags für einen Vertrag mit GMWB-Option

Die faire Garantiegebühr hängt sehr stark von x_W ab. Obwohl sich der insgesamt garantierte Entnahmebetrag nicht ändert, beeinflusst die jährliche garantierte Entnahme den Wert des Vertrags massiv. Während die faire Garantiegebühr für x_W=5% nur 0,05% beträgt, steigt sie für x_W=9% auf 0,38% an.

5.3 Sensitivitätsanalysen bezüglich der Kapitalmarktparameter

Wir betrachten einen Vertrag mit GMIB-Option aus Abschnitt 5.2.3, und zwar die Variante mit jährlicher Höchststandsabsicherung für $\ddot{a}=1$. Wir gehen von Kundenstrategie 1 (weder Storno noch Entnahmen) aus und variieren den risikolosen Zins r sowie die Volatilität σ des zu Grunde liegenden Fonds. Tabelle 7 zeigt die faire Garantiegebühr für diesen Vertrag für verschiedene Werte von r und σ.

Risikoloser Zins / Volatilität	r=3%	r=4%	r=5%
σ = 10%	0,46%	0,28%	0,20%
σ = 15%	1,09%	0,76%	0,56%
σ = 20%	1,94%	1,40%	1,05%

Tabelle 7: Sensitivität der fairen Garantiegebühr bezüglich der Kapitalmarktparameter r und σ am Beispiel eines Vertrags mit GMIB-Option

Wie erwartet ist die faire Garantiegebühr fallend im risikolosen Zins und steigend in der Volatilität, da einerseits bei steigenden Zinsen die Werte der Garantien fallen, andererseits durch steigende Volatilitäten die entsprechenden Optionen an Wert gewinnen. Auffällig ist, dass die faire Garantiegebühr sehr stark auf Veränderungen der Volatilität reagiert. Vor diesem Hintergrund ist es sinnvoll, das im Rahmen von Variable Annuities angebotene Fondsuniversum auf eine Auswahl von Fonds mit beschränktem Schwankungsrisiko einzuschränken. Die relativ starke Abhängigkeit der Werte vom Zins zeigt auch, dass Versicherer, die sich nicht gegen Zinsänderungen absichern, ein hohes Risiko tragen.

6 Ausblick auf weiterführende Analysen und Übertragbarkeit nach Deutschland

In der vorliegenden Arbeit wurde erstmals ein Modell vorgestellt, welches eine konsistente und umfassende Analyse und Bewertung aller derzeit im Rahmen von Variable Annuities in den USA angebotenen Garantien ermöglicht. Für eine Vielzahl von Verträgen und Kundenstrategien wurde ein fairer Preis für die entsprechenden Garantien berechnet. Einige dieser Garantien werden derzeit zu Preisen angeboten, die über dem fairen Wert liegen. Andere, insbesondere garantierte Verrentungen im Rahmen von so genannten GMIB-Optionen, werden hingegen stark unter ihrem Wert angeboten.
Die Tatsache, dass einige Optionen zu einem Preis angeboten werden, der unter dem fairen Wert in unserem Modell liegt, lässt sich nur damit erklären, dass Versicherer einerseits von Quersubventionierungen aus anderen Gebühren ausgehen, andererseits ein nicht finanzrationales Kundenverhalten unterstellen. Insbesondere die Annahme, dass ein großer Teil der Kunden sich bei GMIB-Optionen selbst dann nicht für eine Verrentung entscheidet, wenn die entsprechende Option stark im Geld ist, erscheint gefährlich. Gerade bei Kunden, die sich bewusst für ein Produkt mit garantierten Mindestrenten entscheiden, ist davon auszugehen, dass finanzrationale Argumente bei der Entscheidung über die Verrentung eine Rolle spielen werden.

Da die Gebühr in Prozent des Fondsguthabens erhoben wird, wird sie dann besonders hoch, wenn die zu Grunde liegenden Fonds stark gestiegen sind. In diesem Fall muss der Kunde aber erwarten, dass er voraussichtlich keine Leistung aus der Option erhalten wird. Dies kann ihn dazu veranlassen, finanzrational zu stornieren. Ferner ist durch die zunehmende Diskussion über solche Produkte mit einer zunehmenden Aufklärung der Kunden zu rechnen, was ebenfalls zu einer stärkeren Finanzrationalität führen wird. Schließlich ist auch denkbar, dass Marktteilnehmer bewusst Bewertungsineffizienzen aufspüren und gegen Versicherer spekulieren, sei es durch Beratung von Versicherungsnehmern hinsichtlich optimaler Strategien oder durch Erwerb von Policen mit Garantien im Zweitmarkt.[32]
Bei der Betrachtung unserer Ergebnisse ist zu beachten, dass die Analysen im Rahmen eines einfachen Black-Scholes Modells erfolgten. Insbesondere bei Verträgen mit langer Laufzeit ist es angebracht, die Einflüsse stochastischer Zinsen und Volatilitäten zu berücksichtigen, was die Preise aller hier angebotenen Garantien tendenziell erhöhen wird. In weiterführenden Analysen werden wir stochastische Zinsen in unser Modell integrieren, was die Dimensionalität bei der Bewertung im Diskretisierungsansatz weiter erhöht.
Ferner haben wir neben den Garantiegebühren und Stornoabschlägen keine weiteren Kosten berücksichtigt. Da alle weiteren Kosten die Wertentwicklung des Guthabens reduzieren, führen diese ebenfalls zu einer Erhöhung des Optionswerts: Wird beispielsweise eine Abschlussgebühr von 4% des Einmalbeitrags erhoben, so entspricht eine Beitragsgarantie bei Ablauf einer Garantie von 104,17% des Sparbeitrags.
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit der Bewertung derartiger Garantien. Im Rahmen weiterführender Analysen werden wir Aspekte des laufenden Risikomanagements, insbesondere die Implementierung effizienter Hedgingstrategien analysieren. Lehman Brothers (2005) haben im Rahmen einer Umfrage unter einigen Versicherern, die derartige Produkte anbieten, herausgefunden, dass diese im Rahmen ihres Hedging teilweise nur Delta-Risiken[33] absichern. Die Absicherung von Gamma- und Rho-Risiken scheint eher die Ausnahme zu sein. Keiner der Versicherer gab an, Vega-Risiken abzusichern. Vor diesem Hintergrund ist davon auszugehen, dass ein großer Teil der ausgesprochenen langfristigen Garantien nicht angemessen abgesichert ist. Ein adäquates Risikomanagement für derartige Garantien umzusetzen, ist äußerst komplex und erfordert die Konvergenz klassischer aktuarieller und moderner finanzmathematischer Methoden. Außerdem ist jede Hedgingstrategie, die von nicht-finanzrationalem Kundenverhaltens ausgeht, von der Güte der entsprechenden Annahmen abhängig. Bereits kleinere Abweichungen können zu relativ großem Anpassungsbedarf im Hedgingportfolio führen. Die aktuariellen Annahmen lassen sich insbesondere nicht an den Kapitalmärkten absichern und stellen deshalb ein zentrales Risiko bei der Umsetzung derartiger Produkte dar.
Unser Modell liefert bei einer Bewertung im Falle finanzrationalen Kundenverhaltens automatisch die jeweils optimale Kundenstrategie. Ein weiterer Ansatzpunkt für künftige Forschungsarbeiten ist daher eine systematische Analyse, wann welches Kundenverhalten optimal ist. Dies ist umso wichtiger, je mehr Wahlmöglichkeiten und Flexibilitäten im Produkt enthalten sind.

---

[32] Coventry First, Marktführer im US-amerikanischen Zweitmarkt für Lebensversicherungen hat im Jahr 2005 angekündigt, künftig auch Variable Annuities zu kaufen, sofern der „faire Marktwert" über dem Rückkaufswert liegt.
[33] Zur Definition der so genannten Griechen, also der Risikokennzahlen Delta, Gamma, Rho und Vega, vgl. z.B. Kapitel 14.4 in Hull (1997).

Die betrachteten Guaranteed Minimum Living Benefits beinhalten attraktive und innovative Garantien, die grundsätzlich auch für den deutschen Lebensversicherungsmarkt interessante Produktalternativen darstellen können. Bei der Übertragung der Konzepte sind jedoch einige Aspekte zu beachten:
Bilanziell bzw. aufsichtsrechtlich ist zunächst die Frage zu klären, ob und gegebenenfalls unter welchen Umständen über das Fondsguthaben hinausgehende zusätzliche Deckungsrückstellungen erforderlich sind. Ferner stellt sich die Frage ob der zum Kündigungszeitpunkt vorhandene Wert der Garantien in den Rückkaufswert als Zeitwert nach §176 VVG eingehen muss. Dies würde dazu führen, dass der Rückkaufswert in der Regel das Fondsguthaben übersteigt. Die faire Gebühr für die Garantien würde dadurch steigen. Insbesondere würde die Annahme von Stornowahrscheinlichkeiten nicht zu einer Reduktion der Garantiegebühren führen.
Aus aktuarieller bzw. finanzmathematischer Sicht ist anzumerken, dass Altersvorsorgeprodukte in Deutschland überwiegend gegen laufende Beiträge angeboten werden. Diese können zwar prinzipiell analog bewertet werden. Allerdings erhöht sich dadurch die Komplexität und die Unsicherheit in den aktuariellen Annahmen massiv, da der Kunde in der Regel eine Vielzahl weiterer Wahlmöglichkeiten besitzt: Er kann den Vertrag beitragsfrei stellen, Beiträge dynamisieren, Dynamisierungen widersprechen oder Zuzahlungen vornehmen.
Darüber hinaus sind aktuarielle Annahmen, die in anderen Ländern realistisch sein mögen, kritisch zu hinterfragen. Beispielsweise ist auf Grund der unterschiedlichen steuerlichen Behandlung von Renten und Kapitalauszahlungen von anderen Verrentungswahrscheinlichkeiten als in anderen Ländern auszugehen.
Wenn diese Herausforderungen gemeistert werden, können derartige Garantieprodukte ein Bereicherung für die Produktlandschaft in Deutschland darstellen und gleichzeitig ein interessantes Betätigungsfeld für Aktuare der dritten Generation bieten, vgl. Bühlmann (1987).

7 Literatur

Aase, K.K. und Persson, S.A. (1994): Pricing of Unit-Linked Insurance Policies. Scandinavian Actuarial Journal, 1, 26-52.

Bacinello, R. und Ortu, F. (1993): Pricing Equity-Linked Life Insurance with Endogenous Minimum Guarantees. Insurance: Mathematics and Economics, 12, 245-257.

Bacinello, R. und Ortu, F. (1994): Single and Periodic Premiums for Guaranteed Equity-Linked Life Insurance under Interest Rate Risk: The Lognormal + Vasicek Case. In: Peccati, L. und Viren, M.: Financial Modelling: Recent Research. Physica-Verlag, Berlin, 1-25.

Bingham, N.H. und Kiesel, R. (2004): Risk-Neutral Valuation – Pricing and Hedging of Finanicial Derivatives. Springer Verlag, Berlin.

Blohm, J. (1996), Produktdesign der Aktienindexgebundenen Lebensversicherung in Deutschland. Der Aktuar, 2, 1996, 12-16.

Brennan, M.J. und Schwartz, E.S. (1976), The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee. Journal of Financial Economics, 3, 195-213.

Brennan, M.J. und Schwartz, E.S. (1979a), Pricing and Investment Strategies for Guaranteed Equity-Linked Life Insurance. Monograph No. 7, Huebner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia.

Brennan, M.J. und Schwartz, E.S. (1979b), Alternative Investment Strategies for the Issuers of Equity-Linked Life Insurance with an Asset Value Guarantee. Journal of Business, 52, 63-93.

Bühlmann, H: (1987), Actuaries of the Third Kind. ASTIN Bulletin Vol. 17 No. 2, November 1987.

Cruz, H. (2005), The Savings Game - Making Sense of a Confusing Array of Annuities - Annuities Provide Dizzying Set of Options. Chicago Tribune, 18. Dezember 2005.

Dillmann, T. und Ruß, J. (1999), Implizite Optionen in Lebensversicherungsprodukten - Eine quantitative Analyse am Beispiel des Kapitalwahlrechts. Versicherungswirtschaft, 12/1999, 847-850.

Glasserman, P. (2003), Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Series: Stochastic Modelling and Applied Probability, Vol. 53. Springer Verlag, Berlin.

Greene, M.R. (1973), A Note on Loading Charges for Variable Annuities. Journal of Risk and Insurance, 40, 473-478.

Hull, J.C. (1997), Options, Futures and other Derivatives. Prentice-Hall International, London.

JPMorgan (2004), Variable Annuity Guarantees - Increased Volatility Risk. European Life Insurance, 28. April 2004.

Karatzas, I. und Shreve, S.E. (1991), Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer, Berlin, 1991.

Kurz, A.E. (1997), Die Fondsgebundene Lebensversicherung mit Mindestgarantie – Modelltheoretische Bewertung und Anforderungen an das Asset-Liability-Management. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

Lehman Brothers (2005), Variable Annuity Living Benefit Guarantees: Over Complex, Over Popular and Over Here? European Insurance, 22. April 2005.

Mattar, K. (1996), Aktienindexgebundene Lebensversicherung in Deutschland – Chancen und Stolpersteine. Der Aktuar, 2, 1996, 51-54.

Meisch, J. und Stolz, W. (1996), Indexgebundene Lebensversicherung – Erfolgschancen auch in Deutschland? Versicherungswirtschaft, 13/1996, 910-913.

Milevsky, M. und Posner, S.E. (2001), The Titanic Option: Valuation of the Guaranteed Minimum Death Benefit in Variable Annuities and Mutual Funds. The Journal of Risk and Insurance, Vol. 68, No. 1, 91-126.

Milevsky, M. und Salisbury, T.S. (2002), The Real Option to Lapse and the Valuation of Death-Protected Investments. Working Paper York University and The Fields Institute, Toronto.

Milevsky, M. und Salisbury, T.S. (2004), Static and Dynamic Valuation of Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits. Working Paper York University and The Fields Institute, Toronto.

Müller, H. (2004), Neue aufsichtsrechtliche Rahmenbedingungen für Lebens- und Rentenversicherungen in den USA - Implikationen für das Risikomanagement sowie mögliche Anwendungen für deutsche Versicherer. Vortrag bei der DAV-Tagung, AFIR-Gruppe, 28. April 2005, Berlin.

Mutschler, K. und Ruß, J. (2001), Die Fondsgebundene Rentenversicherung mit Fondsanbindung in der Rentenbezugsphase - Produktideen und empirische Analysen. Blätter der DGVM, Band XXV, Heft 1, April 2001, 95-110.

Myers, S.C. (1977), Determinants of Corporate Borrowing. Journal of Financial Economist, 5, 147-175.

Nielsen, J.A. und Sandmann, K. (1995), Equity-Linked Life Insurance: A Model with Stochastic Interest Rates. Insurance: Mathematics and Economics, 16, 225-253.

Perold, A.R. (1986), Constant Proportion Portfolio Insurance. Harvard Business School, Working paper.

Pioneer (2005), Annuistar Plus Annuity Prospectus, 2. Mai 2005.

Rentz, R.A. Jr. (1972), Variable Annuities…Useful but Unknown. Business Studies, 11, 31-42.

Ruß, J. (1999), Die Aktienindexgebundene Lebensversicherung in Deutschland. Ifa-Verlag, Ulm.

Sloane, W. R. (1970), Life Insurers, Variable Annuities and Mutual Funds: A Critical Study. Journal of Risk and Insurance, 37, S. 99.

Tanskanen, A. und Lukkarinen, J. (2004), Fair Valuation of Path-Dependent Participating Life Insurance Contracts. Insurance: Mathematics and Economics 33, 595–609.

Turner, S.H. (1969), Asset Value Guarantees under Equity-Based Products. Transactions of the Society of Actuaries, 21, 459-493.

Turner, S.H. (1971), Equity-Based Life Insurance in the United Kingdom. Transactions of the Society of Actuaries, 23,273-288.