

# Curve Fitting

## Efficient methods for calculating Solvency Capital

### Zusammenfassung der Diplomarbeit an der Universität Ulm

Jochen Wieland

Finanz- und Versicherungsunternehmen sehen sich im Hinblick auf neue Aufsichtsregularien (insb. Solvency II) zunehmend mit der Notwendigkeit konfrontiert ihre Risikosituation gesamthaft und marktnah darstellen zu können. Im Solvency II Framework nimmt dabei die Berechnung des Solvency Capital Requirements (SCR) eine besondere Stellung ein; dieses gibt die mindestens benötigten (anrechenbaren) Eigenmittel an, so dass das Unternehmen gemäß projizierter Entwicklung mit 99,5%-iger Wahrscheinlichkeit innerhalb des nächsten Jahres solvent bleibt. Es ist dabei vorgesehen, entweder eine explizit vorgegebene Standardformel zu verwenden, bei der das Unternehmen in Schockszenarien einzelner Risikotreiber gestresst wird und die jeweils berechneten Kapitalanforderungen mittels Korrelationsmatrizen zum SCR aggregiert wird. Andererseits hat das Unternehmen die Möglichkeit, ein unternehmensindividuelles internes Modell zu implementieren, das die möglichen Entwicklungen der Marktwertbilanz für das nächste Jahr nach bestmöglicher Schätzung simuliert und das SCR aus der resultierenden Wahrscheinlichkeitsverteilung ableitet. Eine sinnvolle Berechnungsformel ist im Folgenden gegeben:

$$SCR = \min \left\{ x \in \mathfrak{R} : P \left( AC_0 - \frac{AC_1}{1 + s(0,1)} > x \right) \leq 1 - \alpha \right\}$$

$\alpha$  Solvenzwahrscheinlichkeit, hier 0,995

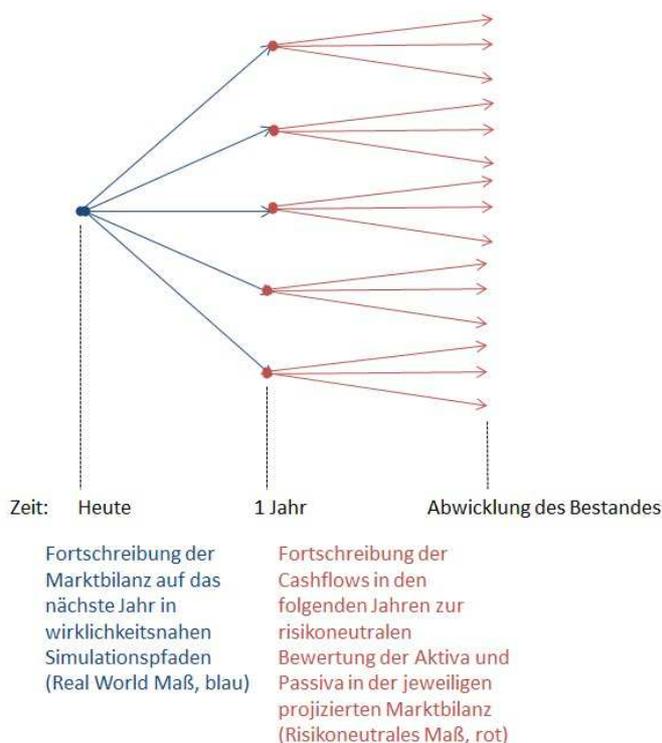
$P$  (realitätsgetreues) Wahrscheinlichkeitsmaß

$AC_0, AC_1$  Heute bzw. in einem Jahr vorhandene (anrechenbare) Eigenmittel

$s(0,1)$  Zinssatz für das nächste Jahr

Für Unternehmen kann die Motivation zur Entwicklung eines solchen internen Modells zum einen darin bestehen, dass die Risikoexposition

des Unternehmens besser getroffen wird und sich gegebenenfalls niedrigere Kapitalanforderungen ergeben, und zum anderen, dass ein solches Modell auch unternehmensspezifische Informationen über Auswirkungen einzelner Entwicklungen auf die Solvabilität liefern kann, die für ein effektives Risikomanagement sehr wertvoll sind. Die Schwierigkeit hingegen besteht darin, dass bisherige Methoden zur Berechnung der individuellen stochastischen Simulationen mit einem zu umfangreichen Rechenaufwand verbunden sind. Für eine vollständige Monte-Carlo-Simulation der Marktwertbilanzentwicklungen ist nicht nur eine große Anzahl von Entwicklungspfaden für das nächste Jahr zu durchlaufen. Vielmehr muss aufgrund der komplexen langfristigen Garantien vieler Versicherungsprodukte für jeden dieser Pfade die zu erstellende Marktwertbilanz über eine Fortschreibung der Kapitalanlagen, Verbindlichkeiten und daraus resultierender Cashflows in einer Vielzahl risikoneutraler Pfade in den folgenden Jahren bis zur Abwicklung des Bestandes ermittelt werden. Die Simulationsstruktur dieses als *Nested Simulations* bezeichneten Verfahrens wird in der folgenden Grafik schematisch dargestellt.



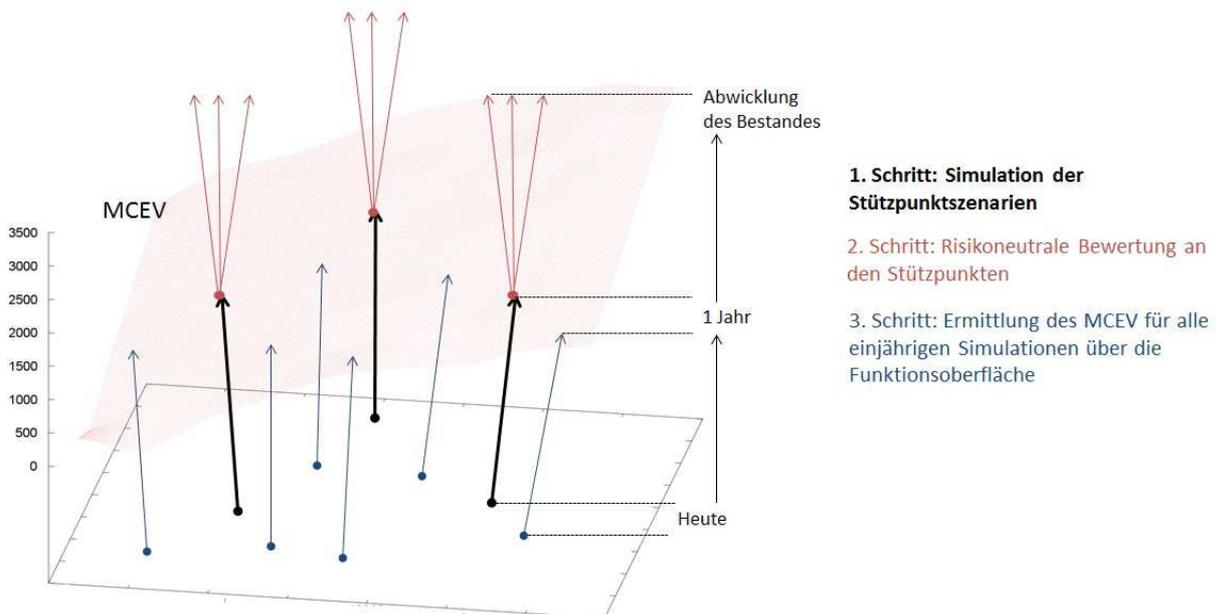
Mit beispielsweise 100.000 „äußeren“ Pfaden und jeweils 1.000 „inneren“ Pfaden ergibt sich somit ein praktisch nicht zu bewältigendes Gesamtrechnungsbudget, wobei für eine hinreichend genaue Schätzung solche Größenordnungen notwendig sind. Zur Lösung des Dilemmas stellt die vorliegende Diplomarbeit ein allgemeines Approximationsverfahren vor, dessen Ziel es ist, die Schlüsselwerte der

projizierten Marktwertbilanzen – insbesondere den Market Consistent Embedded Value (MCEV) als maßgebliche Komponente der Eigenmittel – in funktionaler Abhängigkeit der Risikotreiber darzustellen. Damit wird erreicht, dass nur eine kleine Auswahl von Szenarien simuliert werden

muss, auf deren Grundlage die funktionale Abhängigkeit mittels Interpolations- oder Regressionsverfahren ermittelt wird. Nach Aufstellung des theoretischen Rahmens wird die konkrete Implementierung einer bestimmten Approximationsmethode – des sogenannten *Curve Fitting* – entwickelt und anhand eines Beispielbestandes auf die Güte der Approximation hin getestet.

## Curve Fitting: Implementierung und Tests

Die zentrale Idee beim dargestellten *Curve Fitting* ist es aus der großen Anzahl der Simulationenpfade für die Marktwertbilanz im nächsten Jahr nur einzelne auszuwählen, für welche eine risikoneutrale Ermittlung der Cashflows über „innere“ Simulationen erfolgt. Diese werden als Stützpunkte verwendet, um mittels einer parametrischen Interpolation von geeigneten Basisfunktionen eine Funktion zu schätzen, die den MCEV in Abhängigkeit der Risikotreiber angibt. Das Verfahren wird in der folgenden Grafik illustriert:



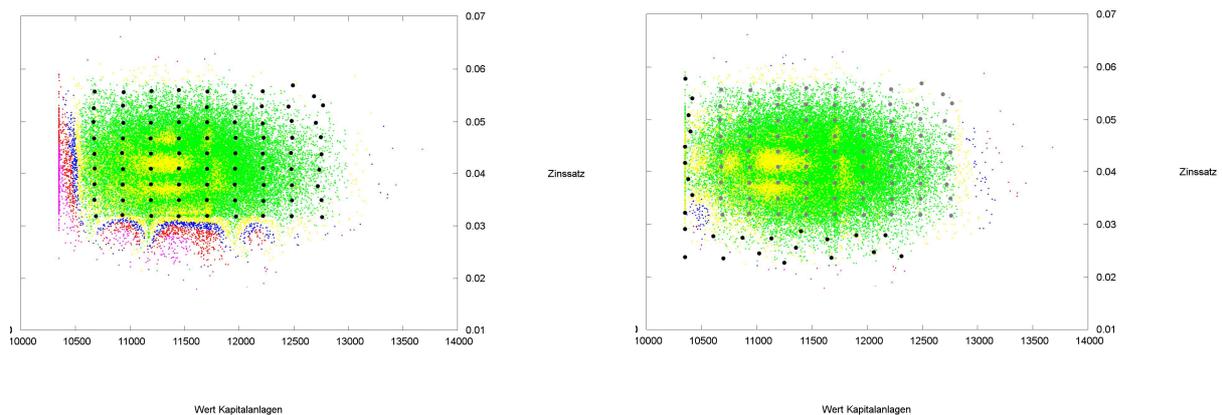
In der vorliegenden Arbeit werden als Basisfunktionen stückweise definierte polynomische Splines verwendet, da sie eine hohe Flexibilität der Funktionsanpassung ermöglichen, aber auf den entsprechenden lokalen Bereich begrenzt sind. Mittels Beispielsimulationen werden dann insbesondere die folgenden Fragen untersucht:

- Welcher Polynomgrad ist sinnvoll für die Basisfunktionen?

- Wie sehr wird die Funktionsanpassung durch die Anzahl und Lage der Stützpunkte beeinflusst? Wie sollten diese sinnvoll gewählt werden?
- Wie kann eine ermittelte Funktionsoberfläche durch eine erweiterte Berechnung systematisch in der Approximationsgüte verbessert werden?

Für die Beispielrechnungen wird die Entwicklung eines Lebensversicherungsbestandes in Abhängigkeit der variablen Größen Marktzins und Marktwert der Kapitalanlagen als Risikofaktoren simuliert. Das Curve Fitting Verfahren wird darauf mit mehreren Sets an Stützpunkten unterschiedlicher Anzahl und Lage durchgeführt. Zunächst ergibt sich aus dem Vergleich der Simulationen mit Basisfunktionen vom Polynomgrad 1, 2 und 3, dass Splines vom Grad 1 die stabilste Approximation liefern. Zwar wird mit einem höheren Grad eine vollständige Differenzierbarkeit der Funktionsoberfläche erreicht, dafür fällt aufgrund der teilweise erzeugten unerwünschten Oszillationen die Schätzgenauigkeit bezüglich der „echten“ Zielwerte ungünstiger aus. Um die Frage nach einer günstigen Anzahl und Lage der Stützpunkte zu untersuchen werden unterschiedliche Sets an Stützpunkten dahingehend gewählt, dass es solche gibt, bei denen Stützpunkte verstärkt in Bereichen liegen, bei denen bereits eine solvenzkritische Entwicklung (fallender Zinssatz, fallender Kapitalanlagewert) vermutet wird, sowie solche, bei denen die Stützpunkte ohne Einbeziehung solcher Vermutungen und damit eher gleichverteilt gewählt werden. Die Simulationen mit dem Beispielbestand zeigen, dass eine günstige Wahl der Stützpunkte erwartungsgemäß auch die Genauigkeit der SCR-Schätzung signifikant verbessert. Allerdings lässt sich auch mit einer neutralen Stützpunktwahl eine zufriedenstellende erste Schätzung erzielen, welche die Möglichkeit bietet, durch nachfolgende erweiterte Interpolationsdurchgänge deutlich verbessert zu werden. Dazu wird in der Diplomarbeit ein adaptiver Algorithmus entwickelt, der in Gebieten, in denen eine erste Schätzung bereits niedrige, d.h. solvenzkritische MCEV-Werte angibt, sukzessiv Stützpunkte hinzufügt, ohne jedoch eine zu starke Häufung dieser zu verursachen. Dies wird durch Feinheitparameter gesteuert. Auf Grundlage eines solchen erweiterten Stützpunktesets wird dann eine erneute Interpolation durchgeführt. Diese Adaptionsmethode wird mehrere Male aufeinander aufbauend

durchgeführt, so dass eine Serie von Interpolationen entsteht, die im kritischen Bereich immer feiner wird. Die Analyse dieser Serien in den Beispielrechnungen zeigt, dass durch das Verfahren die Güte der SCR-Approximation sukzessive verbessert wird. Die folgenden Schaubilder veranschaulichen durch unterschiedliche Färbung die Annäherungsgüte der durch das Curve Fitting geschätzten MCEV-Werte an die „echten“, d.h. durch Nested Simulations ermittelten, Werte nach einer ersten Schätzung (links) und nach Anwendung des adaptiven Verfahrens (rechts).



Grün bzw. gelb gefärbte Punkte geben dabei Bereiche mit einer sehr guten Annäherung an (relative Abweichung der Schätzwerte bis maximal 1% bzw. 5%). Blau, rot oder violett gefärbte Bereiche zeigen stärkere Abweichungen (max. 10%, max. 20% bzw. über 20%). Nach Anwendung der Adaption weisen also nur noch vereinzelt Punkte Abweichungen von mehr als 5% auf. Die schwarzen Punkte geben die verwendeten Stützpunkte an, wobei im rechten Bild die anfänglichen Stützpunkte grau dargestellt sind und die adaptiv hinzugefügten Punkte schwarz. Die besten Ergebnisse werden erzielt, wenn anfänglich eine kleinere Zahl von Stützpunkten verwendet wird (10 - 25 bei 2 Risikofaktoren), und eine größere Zahl adaptiv hinzugefügt wird.

Die Schätzung des SCR selbst erfolgt für unseren Beispielbestand mit dem adaptiven Curve Fitting sehr genau, so dass zuverlässig eine Abweichung von weniger als 1% an den Best Estimate der Nested Simulations erreicht wird und damit ein aus den Nested Simulations ermitteltes empirisches 90%-Konfidenzintervall immer getroffen wird.

Als nächstes Ziel zur Weiterentwicklung des Curve Fitting gilt es, die in diesem Beispielbestand bewährte Methode an anderen Beständen und bezüglich weiterer Risikofaktoren zu testen.