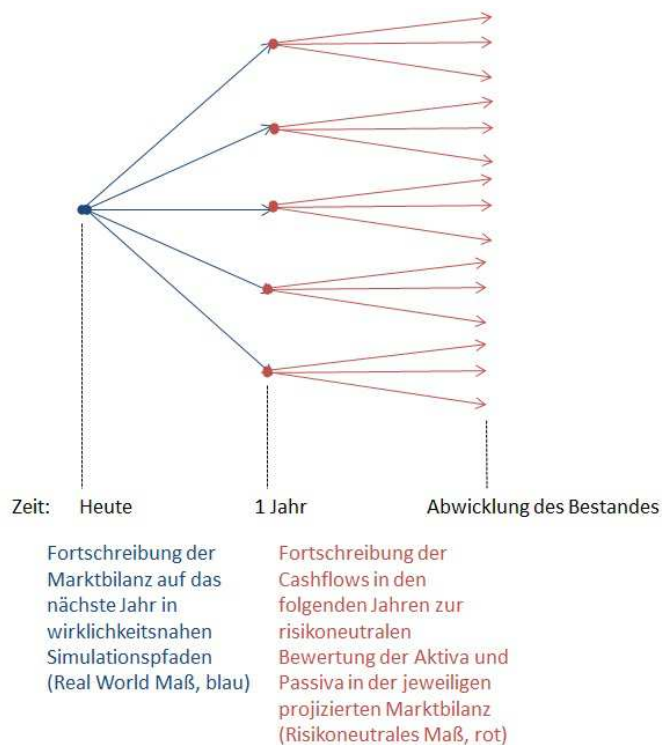


Curve Fitting – eine effiziente Methode zur Berechnung des Solvenzkapitals

Versicherungsunternehmen sehen sich im Hinblick auf neue Aufsichtsregularien (insb. Solvency II) zunehmend mit der Notwendigkeit konfrontiert, ihre Risikosituation gesamthaft und marktnah darstellen zu können. Im Solvency II Framework nimmt dabei die Berechnung des Solvency Capital Requirements (SCR) eine besondere Stellung ein; dieses gibt die mindestens benötigten Eigenmittel an, so dass das Unternehmen mit 99,5%-iger Wahrscheinlichkeit innerhalb des nächsten Jahres solvent bleibt. Es ist dabei zunächst vorgesehen, eine explizit vorgegebene Standardformel zu verwenden, bei der die Marktwertbilanz in Schockszenarien für jeden einzelnen Risikotreiber gestresst wird und die jeweils berechneten Kapitalanforderungen mittels Korrelationsmatrizen zum SCR aggregiert werden. Alternativ hat das Unternehmen aber die Möglichkeit, ein unternehmensindividuelles internes Modell zu implementieren, das die möglichen Entwicklungen der Marktwertbilanz für das nächste Jahr simuliert und das SCR entsprechend aus der resultierenden Wahrscheinlichkeitsverteilung ableitet.

Für Unternehmen kann die Motivation zur Entwicklung eines solchen internen Modells zum einen darin bestehen, dass die Risikoexposition des Unternehmens besser getroffen wird und sich gegebenenfalls niedrigere Kapitalanforderungen ergeben, und zum anderen, dass ein solches Modell auch unternehmensspezifische Informationen über Auswirkungen einzelner Entwicklungen auf die Solvabilität liefern kann, die für ein effektives Risikomanagement sehr wertvoll sind. Die Schwierigkeit hingegen besteht darin, dass bisherige Methoden zur Berechnung der individuellen stochastischen Simulationen zu einer viel zu hohen Rechenzeit führen. Für eine vollständige Monte-Carlo-Simulation der Marktwertbilanzentwicklungen ist nicht nur eine große Anzahl von Entwicklungspfaden für das nächste Jahr zu durchlaufen. Vielmehr muss aufgrund der komplexen langfristigen Garantien vieler Versicherungsprodukte für jeden dieser Pfade die zu erstellende Marktwertbilanz über eine Fortschreibung der Kapitalanlagen, Verbindlichkeiten und daraus resultierender Cashflows in einer Vielzahl risikoneutraler Pfade in den folgenden Jahren bis zur Abwicklung des Bestandes ermittelt werden. Die Simulationsstruktur dieses als *Nested Simulations* bezeichneten Verfahrens wird in der folgenden Grafik schematisch dargestellt.



Mit beispielsweise 100.000 „äußeren“ Pfaden und jeweils 1.000 „inneren“ Pfaden ergibt sich somit ein praktisch nicht zu bewältigendes Gesamtrechnungsbudget, wobei für eine hinreichend genaue Schätzung solche Größenordnungen notwendig sind. Eine ausführliche Diskussion von *Nested Simulations* und möglicher Verfahren zu ihrer Berechnung (incl. sogenannter *Least Squares Monte Carlo Verfahren*) ist dem Buch „Nested Simulations in Life Insurance“¹ von Daniela Bergmann zu finden. Ein innovativer Ansatz zur Lösung des Dilemmas von

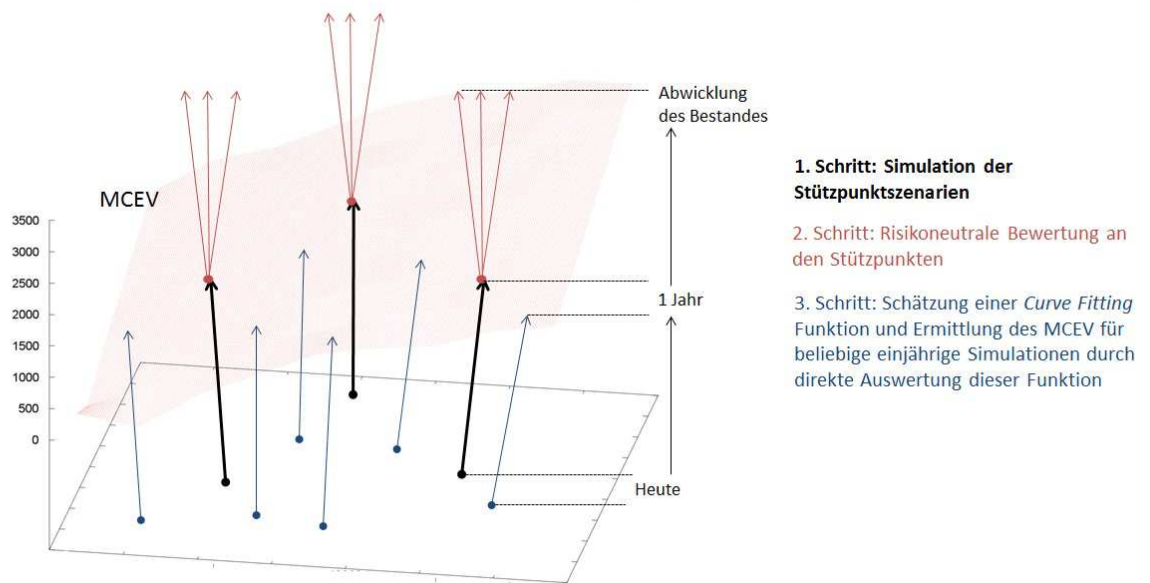
Nested Simulations stellt das *Curve Fitting* dar, bei dem die zentralen Kenngrößen der projizierten Marktwertbilanzen – insbesondere der Market Consistent Embedded Value (MCEV) als maßgebliche Komponente der Eigenmittel – in funktionaler Abhängigkeit der Risikotreiber darstellt wird. Für die Bestimmung einer geeigneten Funktion muss dazu nur eine kleine Auswahl von Szenarien simuliert werden, auf deren Grundlage die funktionale Abhängigkeit dann mittels Interpolations- oder Regressionsverfahren ermittelt wird.

Im ifa wurde für derartige Verfahren ein fundierter mathematischer Modell-Rahmen entwickelt, der damit auch eine verlässliche Abschätzung der mit dieser Methode erzielbaren Qualität der Schätzungen ermöglicht.

Implementierung und Tests

Die zentrale Idee beim *Curve Fitting* ist es, aus der großen Anzahl der Simulationspfade für die Marktwertbilanz im nächsten Jahr nur einzelne auszuwählen, für welche eine risikoneutrale Ermittlung der Cashflows über „Nested Simulations“ erfolgt. Diese werden als Stützpunkte verwendet, um mittels einer parametrischen Interpolation von geeigneten Basisfunktionen eine Funktion zu schätzen, die den MCEV in Abhängigkeit der Risikotreiber angibt. Das Verfahren wird in der folgenden Grafik illustriert:

¹ Link zu Veröffentlichungen des ifa: <http://www.ifa-ulm.de/verlag/Abstractbooks.htm#77>



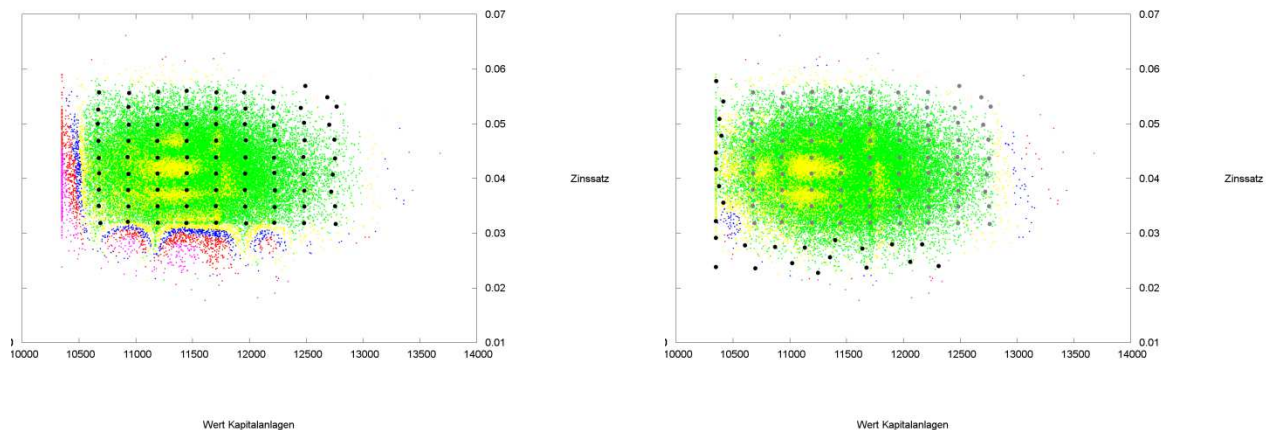
Allerdings zeigen sich bei praktischen Anwendungen eine ganze Reihe schwieriger Fragestellungen, die auf die Güte der Approximation erhebliche Auswirkung haben und damit für eine korrekte Anwendung von fundamentaler Bedeutung sind. Für eine korrekte Durchführung des *Curve Fitting* ist deshalb umfassendes Knowhow und Erfahrung im Umgang mit derartigen Techniken unerlässlich. Wichtige Fragen sind insbesondere:

- Welche Einflussgrößen sind zweckmäßige unabhängige Variablen?
- Welche Basisfunktionen sind für die Approximation besonders gut geeignet?
- Wie stark wird die Güte der Funktionsanpassung durch die Anzahl und Lage der Stützpunkte beeinflusst? Wie sollten diese sinnvoll gewählt werden?

Insbesondere durch die Verwendung adaptiver Methoden kann die Güte der Approximation drastisch verbessert werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Im vorliegenden Beispiel wird die Entwicklung eines Lebensversicherungsbestandes in Abhängigkeit eines stochastischen Marktzinses und eines stochastischen Marktwertes der Kapitalanlagen als Risikofaktoren simuliert. Die folgenden Schaubilder veranschaulichen durch unterschiedliche Färbung die Annäherungsgüte der durch das *Curve Fitting* geschätzten MCEV-Werte an die „echten“, d.h. durch Nested Simulations ermittelten, Werte nach einer naiven Schätzung (links) und nach Anwendung des adaptiven Verfahrens (rechts). Grün bzw. gelb gefärbte Punkte geben dabei Bereiche mit einer sehr guten Annäherung an (relative Abweichung der Schätzwerte bis maximal 1% bzw. 5%). Blau, rot

oder violett gefärbte Bereiche zeigen stärkere Abweichungen (max. 10%, max. 20% bzw. über 20%). Dabei zeigt sich vor allem in den Randbereichen (die für die Bestimmung des SCR von besonderer Bedeutung sind) massive Verbesserungen durch adaptive Verfahren. Nach Anwendung der Adaption weisen nur noch vereinzelte Punkte Abweichungen von mehr als 5% auf.



Die Schätzung des SCR selbst erfolgt bei dieser Anwendung mit dem adaptiven Curve Fitting sehr genau, so dass zuverlässig eine Abweichung von weniger als 1% im Vergleich zu den Ergebnissen der Nested Simulations erreicht wird und damit ein aus den Nested Simulations ermitteltes empirisches 90%-Konfidenzintervall immer getroffen wird.

Generell ist festzuhalten,

- dass *Curve Fitting* eine sehr effiziente Methode darstellt, um stochastische Berechnungen (z.B. zur Bestimmung des SCR) rasch und nachvollziehbar durchzuführen;
- dass die genaue Durchführung der Methode allerdings ein erhebliches Knowhow und entsprechende Erfahrung im Umgang mit derartigen Methoden verlangt, um verlässliche Ergebnisse zu erzielen;
- dass *Curve Fitting* damit den Einsatz stochastischer Modelle für die regelmäßige Steuerung und unterjährige quantitative Analysen in Versicherungsunternehmen ermöglicht.

Weitere Informationen

Jochen Wieland

Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften, Helmholtzstrasse 22, D-89081 Ulm

Phone : +49 (0) 731 50-31237, Fax: +49 (0) 731 50-31239, Email: j.wieland@ifa-ulm.de