

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Alexander Kling, Johannes Schupp, Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften



DAV/DGVFM Herbsttagung 2019
Hannover, 18. November 2019

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Zunahme der Lebenserwartung

Auswirkungen auf die Versicherungsgesellschaften

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

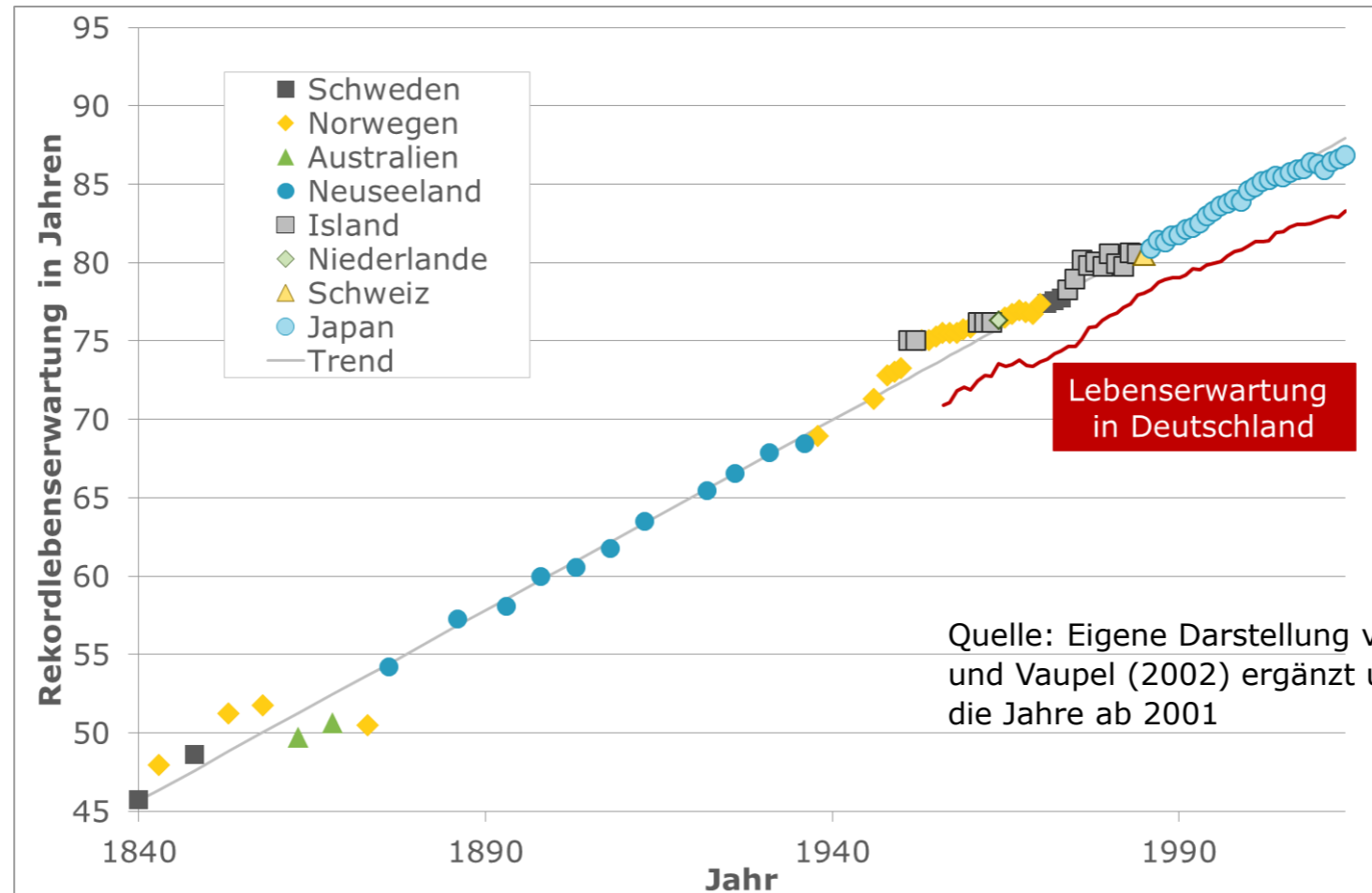
Fazit

Kontaktdaten und Literatur

Motivation

Zunahme der Lebenserwartung

Der weltweite Anstieg der Lebenserwartung ist nicht nur ein vorübergehendes Phänomen ...



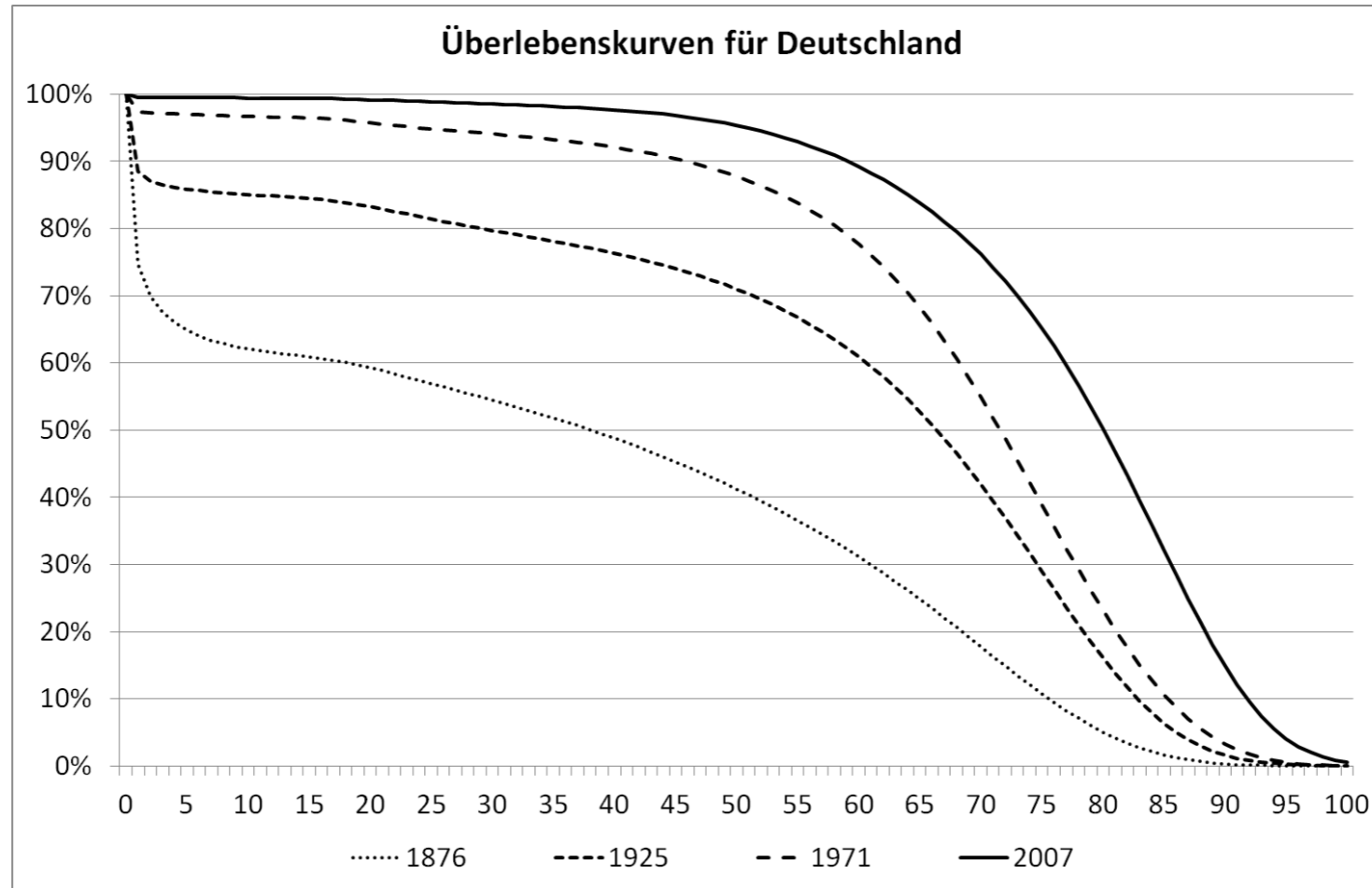
Quelle: Eigene Darstellung von Ergebnissen aus Oeppen und Vaupel (2002) ergänzt um eigene Berechnungen für die Jahre ab 2001

Motivation

Zunahme der Lebenserwartung

Die Ursachen für die Veränderung haben sich in Vergangenheit regelmäßig geändert.

- siehe historische Entwicklung von Überlebenskurven in Deutschland



Motivation

Auswirkungen auf die Versicherungsgesellschaften

Die Frage, wie sich **Sterblichkeiten eines Versichertenbestands in Zukunft** entwickeln, ist von großer Bedeutung für das **Risiko eines Lebensversicherers**.

- zunehmende Bedeutung von Rentenversicherungen
- in Zukunft größere erwartete Verrentungsquoten
- neuartige Produkte
 - geänderte Rentenübergänge
 - innovative Rentenbezugsphasen



Langlebigkeitsrisiko wird in Zukunft eine größere Bedeutung einnehmen.

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Innovative Ansätze für Rentenübergänge und Rentenbezugsphasen

Typische Fragestellungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Fazit

Kontaktdaten und Literatur

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Innovative Ansätze für Rentenübergänge und Rentenbezugsphasen

Rentenübergang

- neue / geänderte Rentenübergänge ohne garantierten Rentenfaktor
- Varianten
 - garantierter Rentenfaktor auf das gesamte Guthaben
 - siehe **GRF** im Anwendungsbeispiel dieses Vortrags
 - garantierter Rentenfaktor nur auf einen Teil des Guthabens (z.B. auf die garantierte Ablaufleistung)
 - siehe **GRFML** im Anwendungsbeispiel dieses Vortrags
 - garantierte Rente in Euro ohne garantierten Rentenfaktor
 - siehe **GMIB** im Anwendungsbeispiel dieses Vortrags

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Innovative Ansätze für Rentenübergänge und Rentenbezugsphasen

Innovative Rentenbezugsphasen

- **Neue Klassische Produkte** in der Rentenbezugsphase
 - Übertragung der Ideen von solvenzoptimierten klassischen Produkten in die Rentenphase
- **fondsgebundene Rentenbezugsphasen**
 - Grundsätzlich kann jedes Anlage- bzw. Garantiemodell in die Rentenphase übertragen werden.
- **gesundheitsabhängige Renten**
 - Enhanced Annuities (Vorzugsrenten)
- Produkte mit mehr **Flexibilität in der Rentenbezugsphase**
 - Verfügbarkeit und Vererbbarkeit des eigenen Kapitals
- Konzepte mit **Auslagerung** des systematischen **Langlebigkeitsrisikos an den Kunden**
 - z.B. Annuity Pools oder Mortality Indexed Annuities
 - insbesondere vor dem Hintergrund des Betriebsrentenstärkungsgesetzes interessant

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Typische Fragestellungen in der Produktentwicklung

Die genannten innovativen Rentenübergänge und / oder Rentenbezugsphasen bringen eine Vielzahl an Fragen mit sich, die im Rahmen der Produktentwicklung zu beantworten sind:

- **Bewertung und Pricing**

- Was ist der ökonomische Wert eines garantierten Rentenfaktors?
- Wie weit ist der garantierte Rentenfaktor zum Zeitpunkt des Rentenübergangs „im Geld“?
- Was ist der ökonomische Wert finanzieller Optionen und Garantien in der Rentenbezugsphase?

- **Überschussdifferenzierung**

- Welche Überschussdifferenzierung ist angemessen, damit ein neues Produkt mit geringerer / andersartiger Garantie (z.B. aufgrund eines modifizierten Rentenübergangs) den gleichen finanzmathematischen Wert aus Kundensicht hat?

- **Profit Testing**

- Wie wirkt ein neues Produktdesign auf die erwartete Profitabilität des Unternehmens? Wie sieht eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der zukünftigen Profitabilität aus?



Diese Fragen sind nur im Rahmen eines stochastischen Modells mit **stochastischer künftiger Sterblichkeitsentwicklung** sinnvoll analysierbar.

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Typen von Sterblichkeitsmodellen

Lee-Carter Modell

Cairns-Blake-Dowd Modell

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Fazit

Kontaktdaten und Literatur

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Typen von Sterblichkeitsmodellen

Bei der Auswahl eines Modells müssen verschiedene **Anforderungen** und **Modelleigenschaften** abgewogen werden:



Es gibt **kein Standardmodell**, das in jeder Situation geeignet ist.

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Typen von Sterblichkeitsmodellen

Lee-Carter Modell

Cairns-Blake-Dowd Modell

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Fazit

Kontaktdaten und Literatur

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Lee-Carter Modell

Das Modell von Lee und Carter (1992; LC) ist das erste und bis heute bekannteste stochastische Sterblichkeitsmodell.

- stochastische Modellierung von Sterblichkeitsraten mit anschließender Transformation auf die Sterbewahrscheinlichkeit $q_{x,t}$:

$$q_{x,t} = 1 - \exp(-m_{x,t})$$

- Die historischen Sterblichkeitsraten $m_{x,t}$ werden durch:
 - **zeitabhängige Parameter** für jedes Kalenderjahr und
 - **altersabhängige Parameter** für jedes Alter modelliert.
- Fortschreibung der Sterblichkeitsraten durch stochastische Simulation der künftigen Entwicklung der zeitabhängigen Parameter

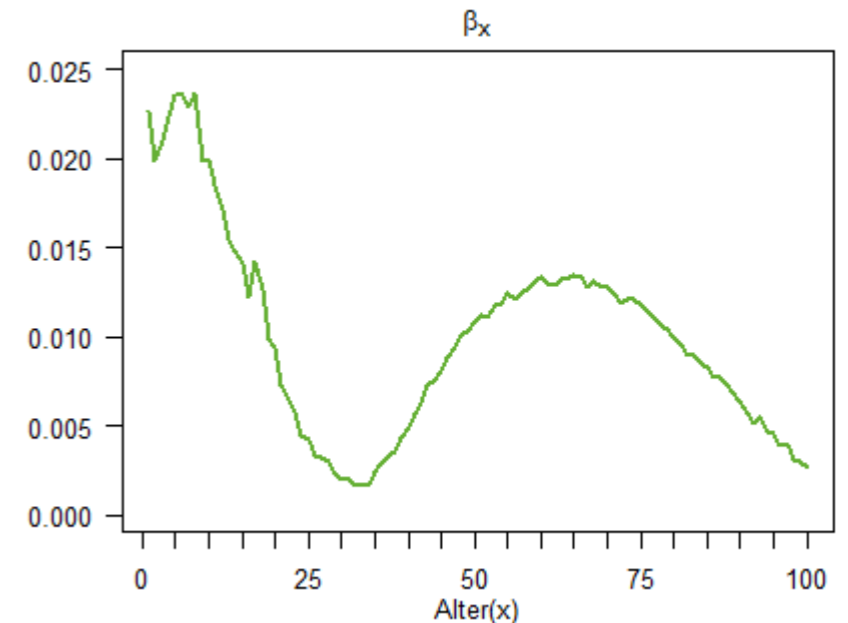
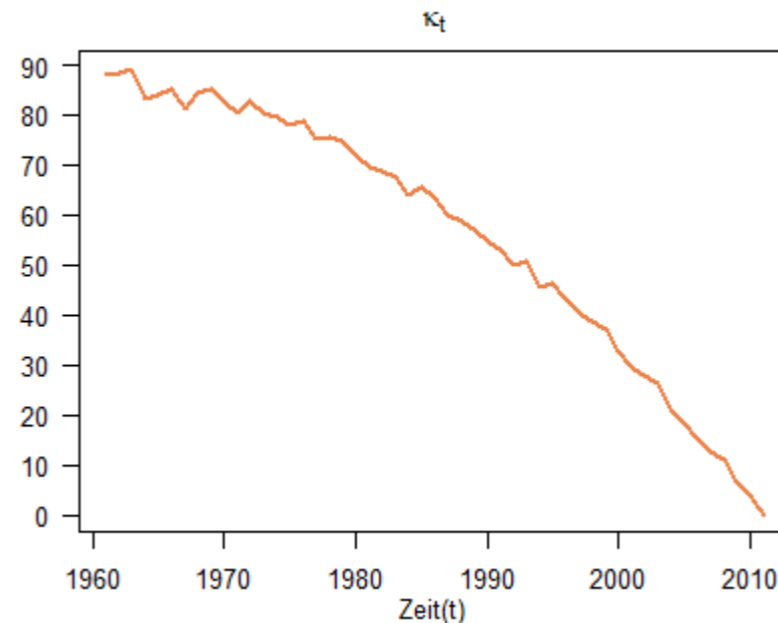
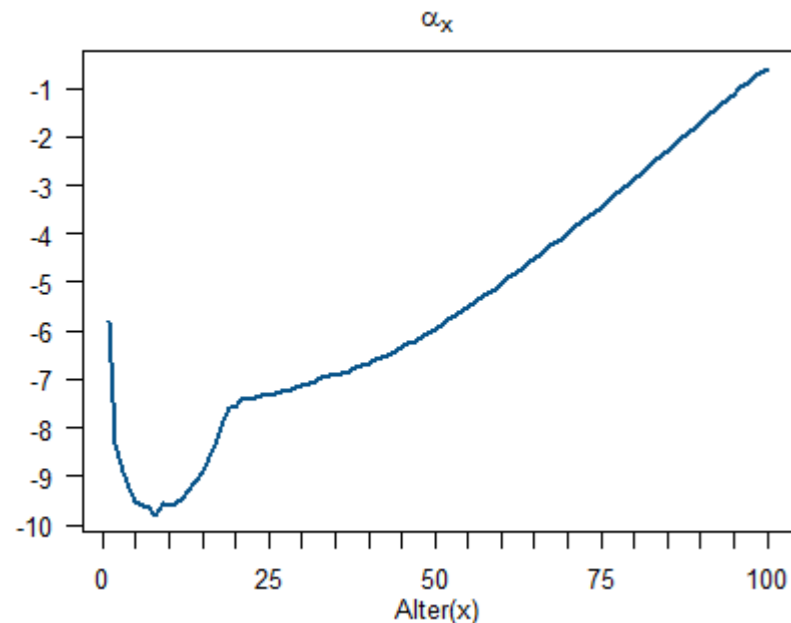
Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Lee-Carter Modell

stochastische Fortschreibung einer Sterblichkeitsrate $m_{x,t}$

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t$$

- α_x beschreibt die altersabhängige Ausgangsterblichkeit (im Prinzip eine Basistafel).
- κ_t beschreibt die Veränderung der Sterblichkeit im Zeitverlauf.
- β_x legt fest, wie stark sich Veränderungen der Sterblichkeit auf einzelne Alter x auswirken.
- Um stochastische künftige Sterblichkeitsraten zu erhalten, wird κ_t stochastisch fortgeschrieben, z.B. durch einen Random Walk mit Drift, AR(1)-Prozess.



Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Lee-Carter Modell

Stärken des Lee-Carter Modells

- Einfachheit in der Modellstruktur und der Simulation
- intuitive Interpretation der Modellparameter
- Anwendbarkeit auf den vollen Altersbereich

Schwächen des Lee-Carter Modells

- große Anzahl an Parametern für ein einfaches Modell (Stichwort Überparametrisierung)
- nur ein stochastischer Treiber und damit vollständige Korrelation zwischen allen Altern
 - (sehr) eingeschränkte Möglichkeit zur Abbildung von unterschiedlich schnellen Sterblichkeitsveränderungen verschiedener Alter, nämlich rein deterministische Fortschreibung über β_x
- zeitunabhängige Altersparameter, die sich in der Realität mit der Zeit ändern
 - dadurch unterschätzte mittel- und langfristige Unsicherheit
- keine Berücksichtigung von Kohorteneffekten möglich

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Typen von Sterblichkeitsmodellen

Lee-Carter Modell

Cairns-Blake-Dowd Modell

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Fazit

Kontaktdaten und Literatur

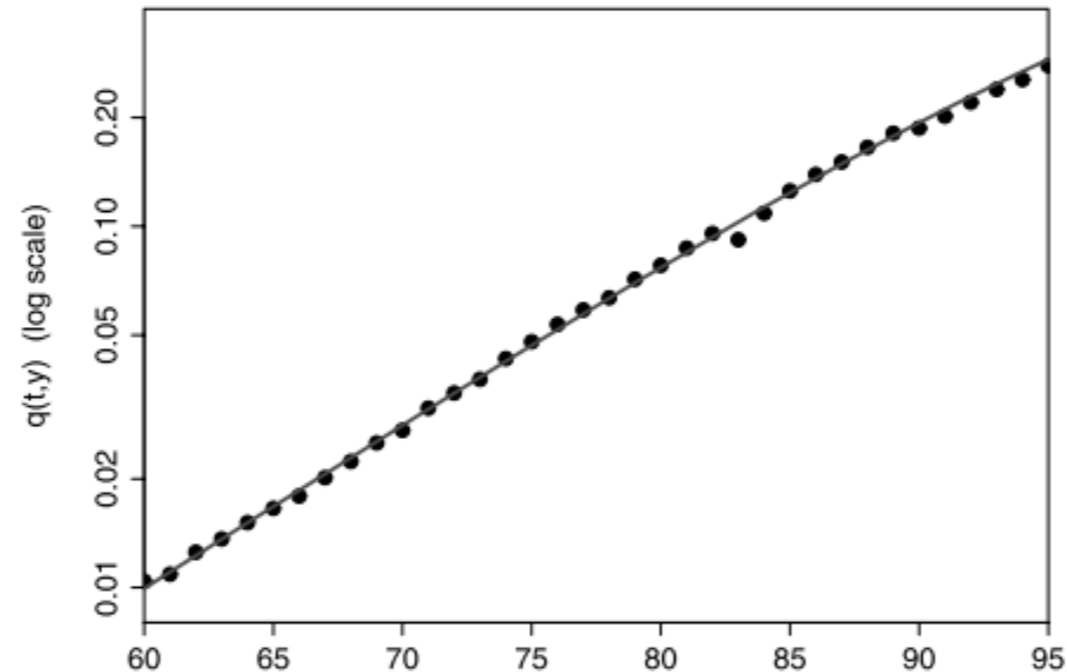
Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Cairns-Blake-Dowd Modell

Ein weiteres häufig verwendetes Sterblichkeitsmodell stammt von Cairns, Blake und Dowd (2006; CBD).

- Beobachtung: In höheren Altern steigen die logarithmierten Sterbewahrscheinlichkeiten näherungsweise linear, mit leichtem Abflachen in den ganz hohen Altern.

– Cairns et al. (2009):



- daher Modellierung der logit-Sterbewahrscheinlichkeiten eines Kalenderjahres als Gerade

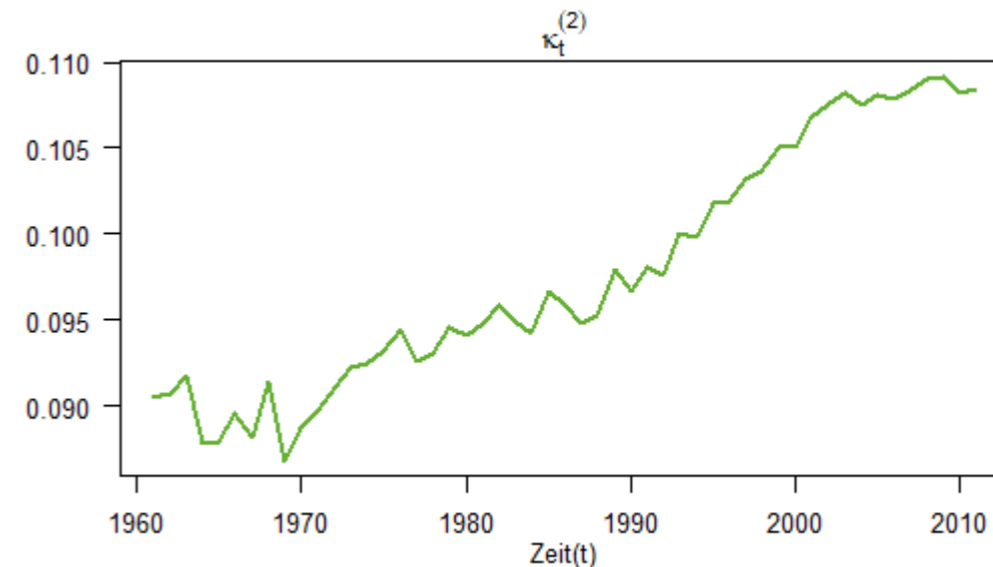
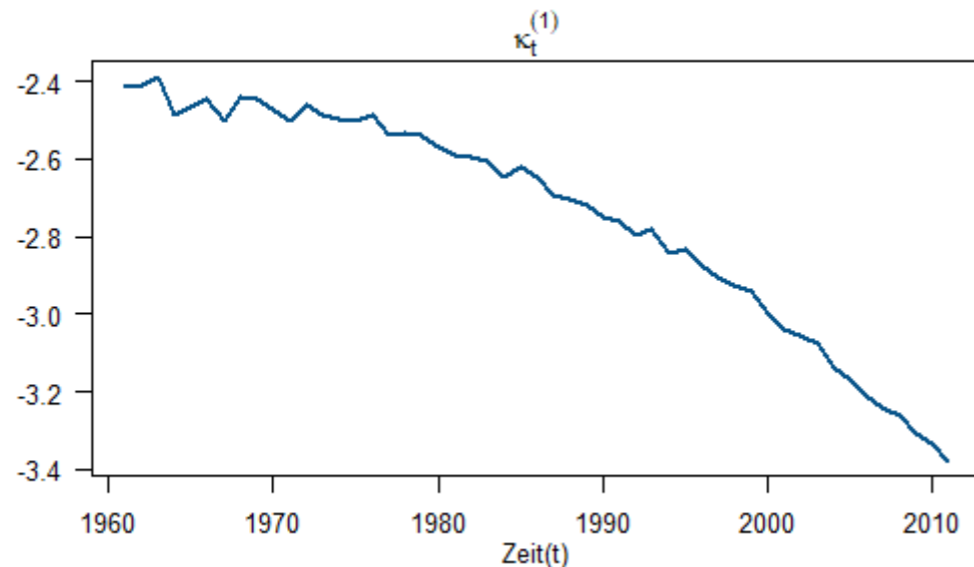
Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Cairns-Blake-Dowd Modell

Ein weiteres häufig verwendetes Sterblichkeitsmodell stammt von Cairns, Blake und Dowd (2006; CBD).

$$\text{logit}(q_{x,t}) = \ln\left(\frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}}\right) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)} \cdot (x - \bar{x})$$

- $\kappa_t^{(1)}$ beschreibt das allgemeine Sterblichkeitsniveau im Zeitverlauf.
- $\kappa_t^{(2)}$ beschreibt die Entwicklung der Steigung der Sterbekurve mit zunehmendem Alter x .
- \bar{x} ist das mittlere Alter im betrachteten Altersbereich
- Stochastische Sterblichkeitsprojektionen können über stochastische Simulation der künftigen Entwicklung von $\kappa_t^{(1)}$ und $\kappa_t^{(2)}$ ermittelt werden, z.B. durch einen zweidimensionalen Random Walk mit Drift.



Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Cairns-Blake-Dowd Modell

Stärken des Cairns-Blake-Dowd Modells

- Einfachheit in der Modellstruktur und der Simulation
- (sehr) wenige Parameter mit klarer Interpretation
 - dadurch Stabilität in der Parameterschätzung
- zwei stochastische Treiber und damit keine vollständige Korrelation zwischen verschiedenen Altern

Schwächen des Cairns-Blake-Dowd Modells

- Modell ist nur für höhere Alter einsetzbar.
 - Linearität in der Modellstruktur gilt nicht für jüngere Alter (z.B. wegen des Unfallbuckels)
- wenig Flexibilität in der Modellstruktur
- Abhängigkeit zwischen zwei stochastischen Treibern
- keine Berücksichtigung von Kohorteneffekten



Anmerkung: Es existieren zahlreiche Varianten und Erweiterungen.

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Modellierte Rentenübergänge

Vorgehen

Annahmen und betrachtete Größen

Ergebnisse

Fazit

Kontaktinformationen und Literatur

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Modellierte Rentenübergänge

Modellierung einer **aufgeschobenen fondsgebundenen Rentenversicherung ohne Garantie** gegen Einmalbeitrag

- **GRF** (garantierter Rentenfaktor auf das gesamte Guthaben A_T) = Kunde erhält das Maximum aus der Rente, die sich mit garantiertem Rentenfaktor g und dann gültigem Rentenfaktor RF_T ergibt.

$$\max\{RF_T, g\} \cdot A_T$$

- **GRFML** (garantierter Rentenfaktor nur für einen begrenzten Teil des Guthabens, darüber Verrentung zu dann gültigen Konditionen) = Kunde erhält bis zum Limit L das Maximum aus der Rente mit garantiertem Rentenfaktor g und dann gültigem Rentenfaktor RF_T , darüber Verrentung zu dann gültigen Konditionen.

$$\max\{RF_T, g\} \cdot \min\{A_T, L\} + RF_T \cdot \max\{A_T - L, 0\}$$

- **GMIB** (Guaranteed Minimum Income Benefit – garantierte Rente in Euro) = Kunde erhält das Maximum aus der garantierten Rente R und einer Rente, die sich mit dann gültigem Rentenfaktor RF_T ergibt.

$$\max\{RF_T \cdot A_T, R\}$$

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Modellierte Rentenübergänge

Vorgehen

Annahmen und betrachtete Größen

Ergebnisse

Fazit

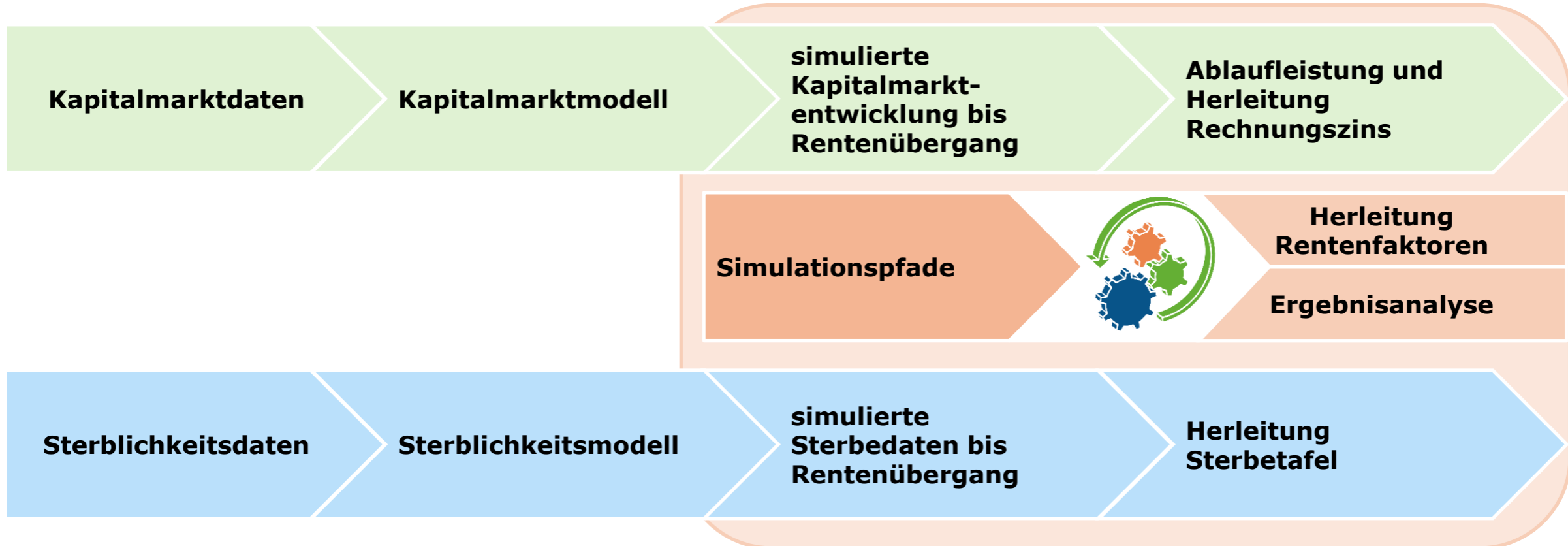
Kontaktdaten und Literatur

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Vorgehen – Übersicht

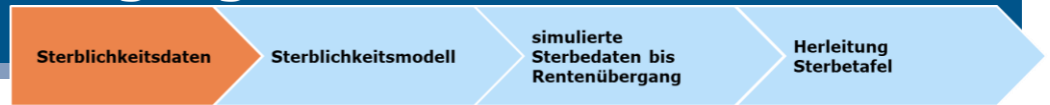
Zur Analyse von Rentengarantien wird die **Wahrscheinlichkeitsverteilung des Rentenfaktors** zum Rentenübergang benötigt.

- Der Rentenfaktor basiert auf den dann gültigen Rechnungsgrundlagen.
 - Wir betrachten die wesentlichen Unsicherheiten Kapitalmarkt und Sterblichkeit.



Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Vorgehen – Sterblichkeitsdaten



Auswahl der Sterblichkeitsdaten zur Kalibrierung

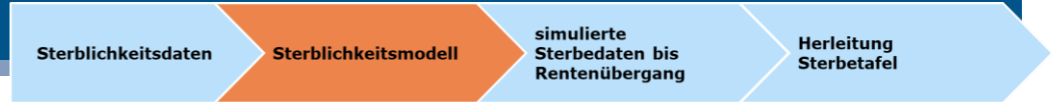
- Datenreihe und insbesondere deren Länge kann enorme Auswirkung auf die Kalibrierung des Simulationsmodells haben.
- Auswahl der Daten je nach Zielsetzung: Modellierung der Gesamtbevölkerungssterblichkeit, eines konkreten Versichertenbestandes oder ganz allgemein der Versichertensterblichkeit?
- Kalibrierung des Simulationsmodells in der Regel nur an Gesamtbevölkerungsdaten möglich
 - betrifft insbesondere Modellparameter zu Trends und Trendunsicherheit
- Konsistenz zu Best-Estimate-Annahmen bzgl. Versichertensterblichkeit üblicherweise durch:
 - Modellkalibrierung an Gesamtbevölkerungsdaten und Anpassung einzelner Modellparameter, insbesondere bzgl. Sterblichkeitslevel, oder
 - Simulation Gesamtbevölkerungssterblichkeit und nachträgliche Anpassung der Szenarien

Im Anwendungsbeispiel

- Kalibrierung anhand Gesamtbevölkerungsdaten
- anschließend Anpassung an Versichertensterblichkeit

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Vorgehen – Auswahl des Sterblichkeitsmodells



Bei der Auswahl eines Modells müssen verschiedene **Anforderungen** und **Modelleigenschaften** abgewogen werden:

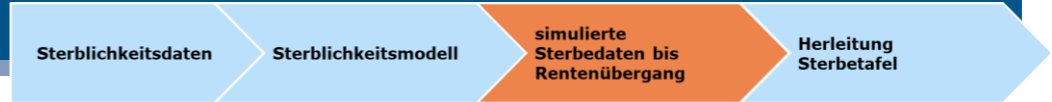


Im Anwendungsbeispiel

- LC Modell
- CBD Modell

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Vorgehen – Simulation



simulierte Sterbedaten bis Rentenübergang

- Output des Simulationsmodells: Fortschreibung der Zielgröße des Sterblichkeitsmodells
- Anschließend: Simulation **realisierter** und **beobachtbarer** Todesfälle
- Anzahl Überlebende bis Rentenübergang
 - wichtig: bei schlechter Sterblichkeitsentwicklung weniger Überlebende und geringerer Wert der Garantien

Im Anwendungsbeispiel

- LC Modell:
 - eindimensionaler Random Walk mit Drift für Fortschreibung der zeitabhängigen Parameter
 - Simulation beobachteter Todesfälle anhand der Poissonverteilung
- CBD Modell:
 - zweidimensionaler Random Walk mit Drift für Fortschreibung der zeitabhängigen Parameter
 - Simulation beobachteter Todesfälle anhand Binomialverteilung

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Vorgehen – Herleitung Sterbetafel



Sterblichkeitsdaten

Sterblichkeitsmodell

simulierte
Sterbedaten bis
Rentenübergang

Herleitung
Sterbetafel

Herleitung Sterbetafel

- Herleitung einer Kalkulationstafel als Basis für die Berechnung des Rentenfaktors
- effizienter und gleichzeitig stabiler Ansatz erforderlich, da in jedem Pfad durchzuführen
 - Extrapolation in hohe Alter
- Orientierung z.B. an Methodik zur DAV 2004 R
 - Zeitraum für Trendschätzung
- Datenbasis für die Herleitung der Sterbetafel
 - wichtig: Welche Daten stehen dem Aktuar zur Verfügung um eine dann gültige Kalkulationstafel herzuleiten?
 - nicht die q_x aus dem Simulationsmodell, sondern nur Todeszahlen
 - vgl. auch Börger, Ruß und Schupp (2019)

Im Anwendungsbeispiel

- Analog DAV2004R, z.B. Trendschätzung, Berücksichtigung von systematischem, unsystematischem Risiko, Trendrisiko

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Modellierte Rentenübergänge

Vorgehen

Annahmen und betrachtete Größen

Ergebnisse

Fazit

Kontaktinformationen und Literatur

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Annahmen und betrachtete Größen

Backup

- Zwei Modelle für die zukünftige Entwicklung der Sterblichkeit
- Modellierungsannahmen **Kapitalmarkt**
 - Black-Scholes für Aktien
 - Shadow-Rate Zinsmodell
 - i.W. Herleitung eines Garantiezinses basierend auf den Returns 10-jähriger Staatsanleihen
 - Unabhängigkeit zwischen Kapitalmarkt und Sterblichkeit
- Betrachtung von drei Produktvarianten (GRF, GRFML, GMIB)
- Analyse der **Wahrscheinlichkeitsverteilung des Verlusts L** aus Sicht des Versicherers

Vertrag	
Alter Versicherungsnehmer	40
Alter Rentenbeginn	67
garantierter Rentenfaktor	0,03944
Limit	$EB = 100.000\text{€}$
garantierte Rente	$0,03944 \cdot EB$
Sterblichkeitsmodell	
Zeitraum für Trendschätzung	20 Jahre
Höchstalter	130 Jahre
Sicherheitszuschläge	analog DAV 2004 R
Verlust des Versicherers	
Verlust Versicherer GRF	$L_T^{GRF} = g \cdot A_T \cdot \max\left\{\frac{1}{RF_T} - \frac{1}{g}, 0\right\}$
Verlust Versicherer GRFML	$L_T^{GRFML} = g \cdot \min\{A_T; L\} \cdot \max\left\{\frac{1}{RF_T} - \frac{1}{g}, 0\right\}$
Verlust Versicherer GMIB	$L_T^{GMIB} = \max\left\{g \cdot G \cdot \frac{1}{RF_T} - A_T, 0\right\}$

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Modellierte Rentenübergänge

Vorgehen

Annahmen und betrachtete Größen

Ergebnisse

Fazit

Kontaktinformationen und Literatur

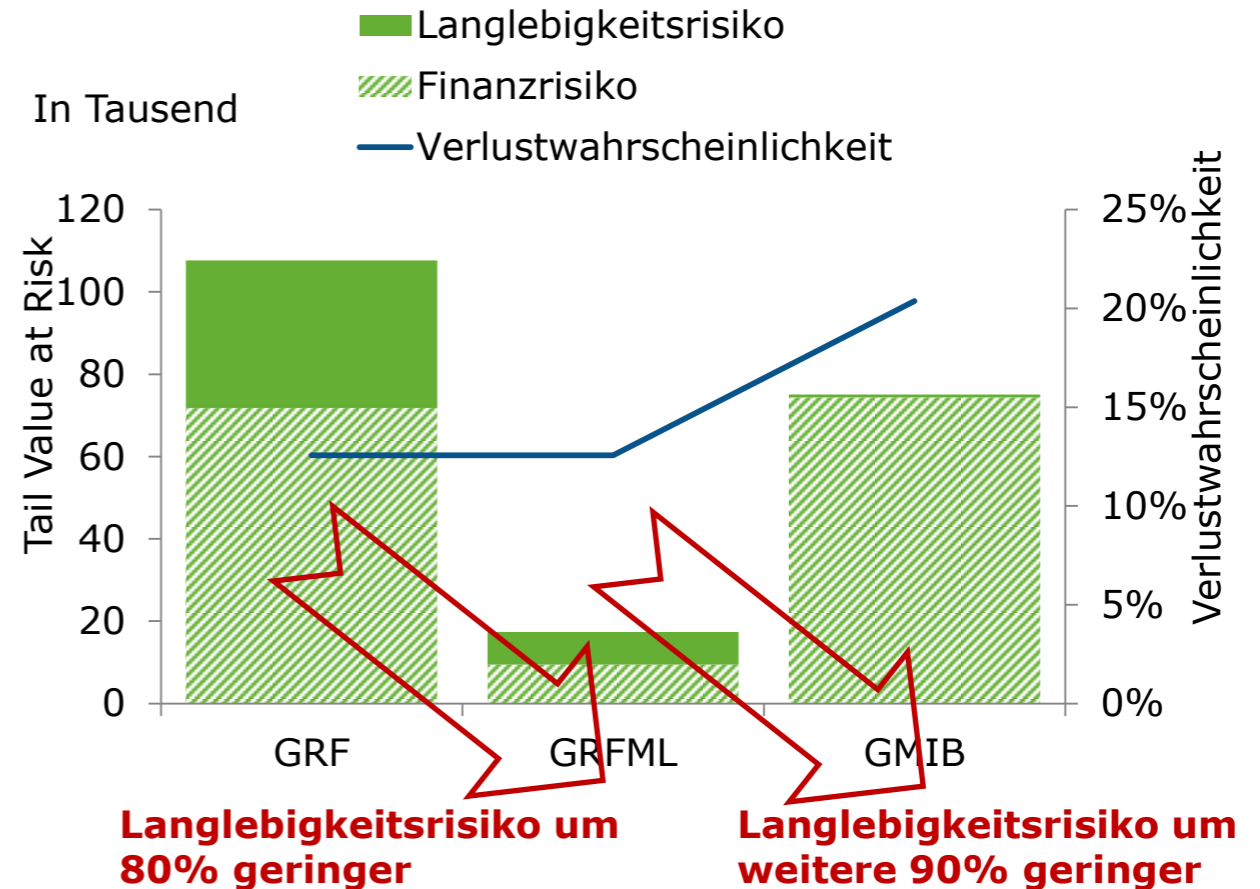
Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Ergebnisse

Vergleich des **Gesamtrisikos** des Versicherers in den drei Produktvarianten

	GRF	GRFML	GMIB
Verlustwahrscheinlichkeit	12,6%	12,6%	20,4%
Erwarteter Verlust	2.140	540	4.990
VaR (99,5%)	78.900	15.600	71.840
TVaR (99%)	107.680	17.360	75.110
Anteil (TVaR) Langlebighkeitsrisiko	33,3%	45,4%	0,9%
Anteil (TVaR) Finanzrisiko	66,7%	54,6%	99,1%

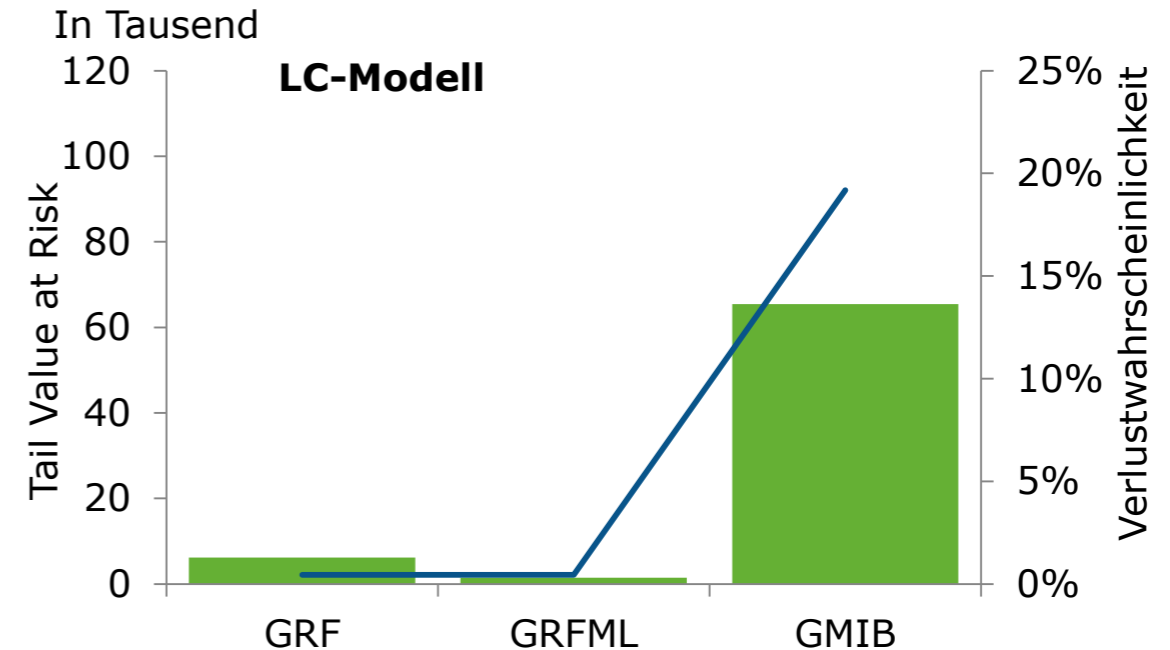
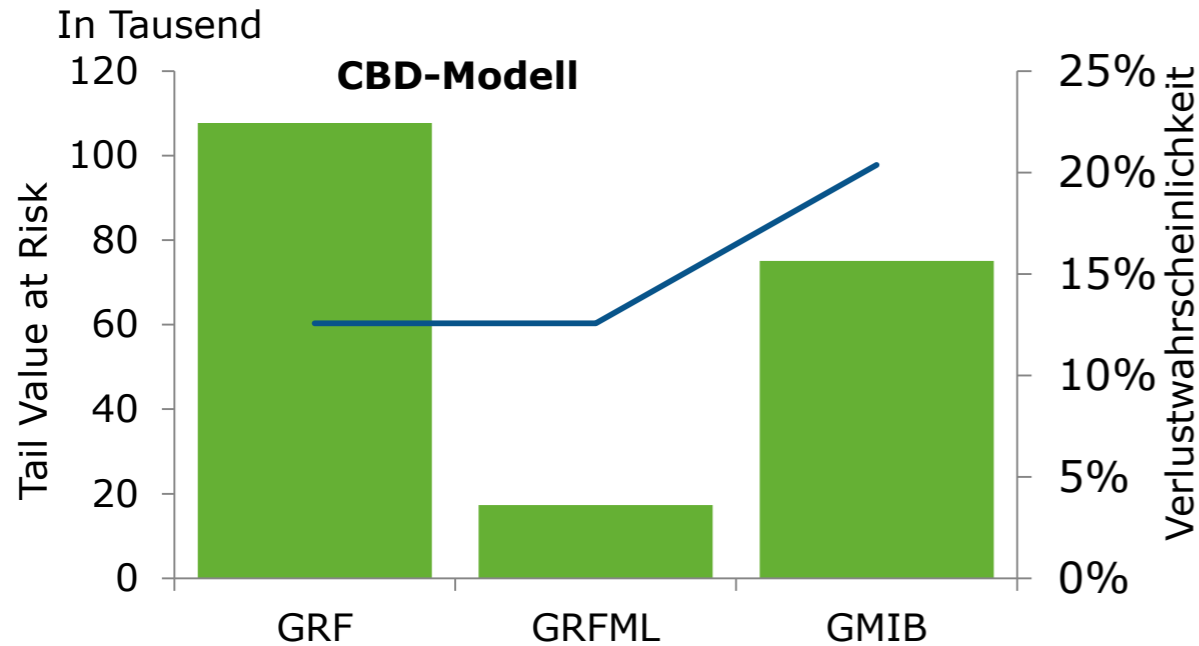
Zerlegung des TVaR in Langlebighkeitsrisiko und finanzielles Risiko für alle drei Produktvarianten



Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Ergebnisse

Vergleich des **Gesamtrisikos** des Versicherers in den drei Produktvarianten für beide betrachteten Modelle (Lee-Carter und Cairns-Blake-Dowd)



- GMIB enthält nur Finanzrisiko, welches z.B. über Produktdesign absicherbar ist.
- Sterblichkeitsmodell hat einen großen Einfluss auf die modellierte Risikosituation des Versicherers.

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Fazit

Kontaktdaten und Literatur

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Fazit

Die Frage, wie sich **Sterblichkeiten eines Versichertenbestands in Zukunft** entwickeln, ist von großer Bedeutung für das **Risiko eines Lebensversicherers**.

- zunehmende Bedeutung von Rentenversicherungen
- in Zukunft größere erwartete Verrentungsquoten
- neuartige Produkte
 - geänderte Rentenübergänge
 - innovative Rentenbezugsphasen

Ein **adäquates Management dieser Risiken** erfordert Modelle, mit denen diese **Risiken angemessen bewertet und quantifiziert** werden können.

- Dies ist nur mithilfe einer **stochastischen Modellierung zukünftiger Sterblichkeiten** sinnvoll möglich.
- Die Wahl des Modells hat einen erheblichen Einfluss auf den ermittelten **Wert** und auf das berechnete **Risiko** der vom Versicherer eingegangenen **Optionen und Garantien**.
 - Die Frage, welches Modell für welche Fragestellung geeignet ist, erfordert ein hohes Maß an Erfahrung mit der stochastischen Modellierung zukünftiger Sterblichkeiten.
 - Je nach Fragestellung sind unterschiedliche Modelle sinnvoll und geeignet.

Stochastische Sterblichkeitsmodellierung in der Produktentwicklung

Agenda

Motivation

Herausforderungen in der Produktentwicklung

Sterblichkeitsmodelle zum Einsatz in der Produktentwicklung

Anwendungsbeispiel: Analyse verschiedener Rentenübergänge

Fazit

Kontaktinformationen und Literatur

Kontaktdaten

Dr. Alexander Kling
+49 (731) 20 644-242
a.kling@ifa-ulm.de



Johannes Schupp
+49 (731) 20 644-241
j.schupp@ifa-ulm.de



Literatur

- Cairns, A., Blake, D., & Dowd, K. (2006). A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration. *Journal of Risk and Insurance* 73(4), 687-718.
- Cairns, A. J., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., & Balevich, I. (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, 13(1), 1-35.
- Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American statistical association*, 87(419), 659-671.
- Börger, M., Ruß, J., & Schupp, J. (2019). It Takes Two: Why Mortality Trend Modeling is more than modeling one Mortality Trend. Working Paper, Ulm University.