

Wie bewertet man Langlebigkeitsrisiken unter Berücksichtigung zukünftiger Änderungen des Sterblichkeitstrends?

- Arne Freimann
- WIMA-Kongress, November 2021
- Im Zusammenarbeit mit
Johannes Schupp, Matthias Börger & Jochen Ruß



Wie bewertet man Langlebigkeitsrisiken unter Berücksichtigung zukünftiger Änderungen des Sterblichkeitstrends?

Agenda

Einleitung & Motivation

Ein stochastisches Sterblichkeitsmodell mit Trendänderungen

Vergleich mit dem CBD-Standardmodell

Bewertungsansätze im Trendmodell

Ausgewählte Ergebnisse

Zusammenfassung

Literaturverzeichnis

Einleitung & Motivation

Langlebigkeitsrisiko aus Sicht des Einzelnen

- **Risiko, dass wir länger leben als unsere Ersparnisse im Alter ausreichen**
- **Zur Veranschaulichung: Frau Jeanne Louise Calment**
 - Hatte damals - im Alter von 90 Jahren - keine direkten Erben mehr
 - Verkaufte ihre Wohnung gegen Zahlung einer Leibrente von 2500 Francs (380€) pro Monat an den 47-jährigen Rechtsanwalt Andre-François Raffray
 - Nach ihrem Tod sollte die Wohnung dafür an Raffray fallen
 - Jeanne Louise Calment ist heute bekannt als Rekordhalterin für das höchste erreichte Lebensalter
 - 21. Februar 1875 bis 4. August 1997 (122 Jahre, 5 Monate, 14 Tage)
 - Insgesamt zahlten der Anwalt (und seine Erben) mehr als das Doppelte des damaligen Marktpreises der Wohnung
 - „*In life, one sometimes makes bad deals*“ (Jeanne Louise Calment)



Die Übernahme von Rentenverpflichtungen erfordert ein **Verständnis für** die damit einhergehenden **Langlebigkeitsrisiken** und **deren adequate Bewertung**

Einleitung & Motivation

Langlebigkeitsrisiko aus Sicht eines Versicherers

■ Was versteht ein Aktuar unter dem Begriff Langlebigkeitsrisiko?

- Das Risiko aus Sicht eines Rentenansiehers, dass eine versicherte Person **länger lebt als erwartet**.

■ Unsystematisches Langlebigkeitsrisiko

- Die Lebenszeit einzelner Kunden übersteigt die durchschnittliche Lebenserwartung
- Versicherer sammeln die individuellen Langlebigkeitsrisiken vieler Kunden und können diese Zufallsschwankungen dadurch minimieren (oder sogar eliminieren)

■ Systematisches Langlebigkeitsrisiko

- Das Risiko, dass die Versicherten – im Mittel – länger leben als erwartet
- Das Problem ist dabei nicht die steigende Lebenserwartung
- Das Risiko liegt darin, dass die Lebenserwartung womöglich schneller steigt als angenommen

■ Wie gehen Aktuare mit diesem Risiko um?

- In der **Tarifkalkulation**: Sterbetafeln mit angemessenen Sicherheitszuschlägen

- Beispiel: DAV 2004R Tafeln

- Im **Risikomanagement**: Berechnung einer angemessenen Mindestkapitalanforderung

- Beispiel „Solvency Capital Requirements“ (SCRs) unter europäischem Aufsichtsregime Solvency II

Einleitung & Motivation

Herausforderungen für Aktuare in der Praxis

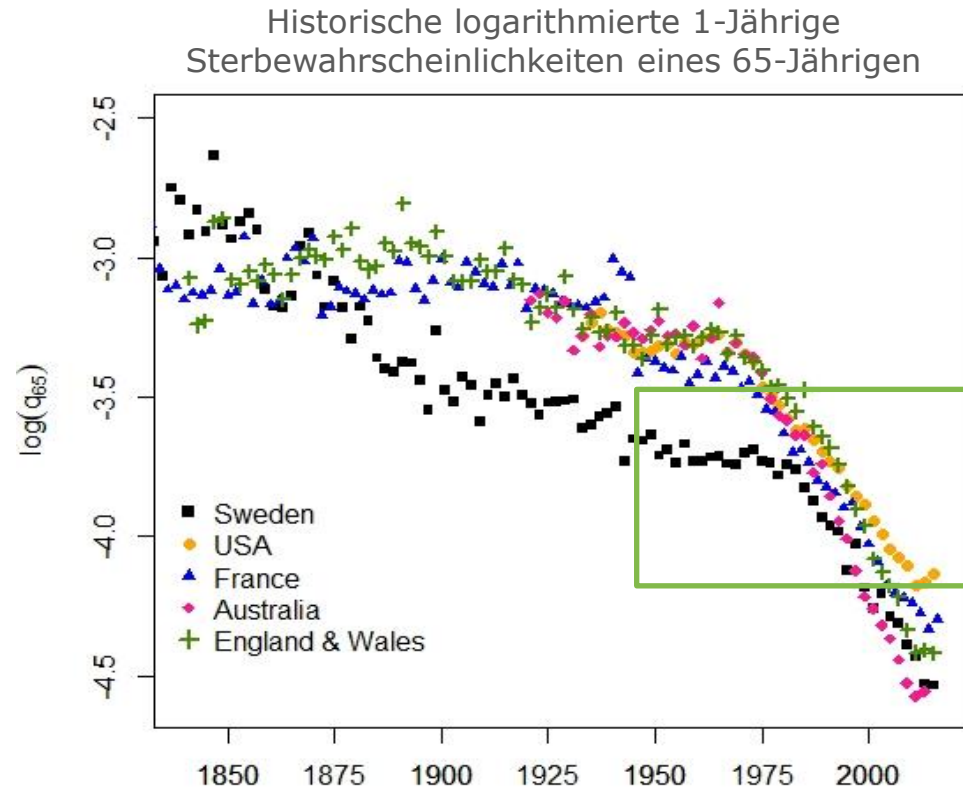
- **Mindestkapitalanforderungen unter Solvency II in einem (partiellen) internen Modell**
 - Versicherer müssen genügend Eigenmittel vorhalten, um alle Verluste, die über einen **Zeitraum von 1 Jahr** eintreten können, mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,5% tragen zu können.
 - Herausforderung: Wie quantifiziert man das Langlebigkeitsrisiko über einen 1-Jahreszeitraum?
 - Für die Bewertung einzelner Positionen sollen grundsätzlich **Marktwerte** („Mark-to-Market“) herangezogen werden
 - Herausforderung: Es existiert kein liquider Kapitalmarkt für Langlebigkeitstransfers (im Gegensatz zu vielen anderen Risiken wie Aktien, Zinsen, Immobilien)
 - In diesem Fall muss auf Bewertungsmodelle zurückgegriffen werden („Mark-to-Model“)
 - Herausforderung: Wie kalibriert man den „Marktpreis für Langlebigkeitsrisiken“?
 - Bei der Modellierung sind **alle wesentlichen Risikotreiber** zu berücksichtigen
 - Herausforderung: Welche sind die wesentlichen Treiber und wie kann man diese modellieren?



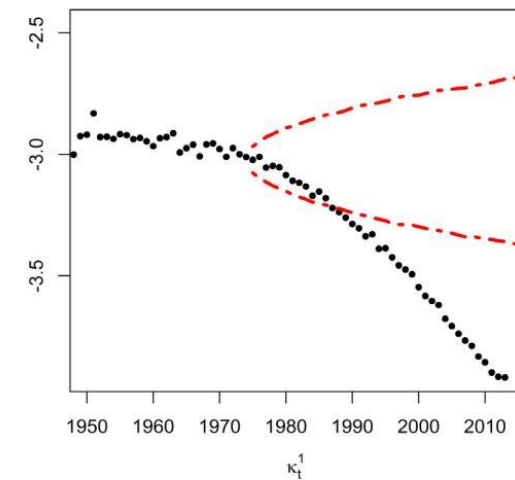
- In den letzten Jahren wurden eine Vielzahl von stochastischen Sterblichkeitsmodellen entwickelt (Lee-Carter, CBD, ...)
- Diese modellieren im wesentlichen die stochastische **Unsicherheit um den aktuellen Sterblichkeitstrend**

Einleitung & Motivation

Wesentlicher Risikotreiber: Trendänderungen in historischer Sterblichkeitsentwicklung



Back test im CBD-Modell mit RWD („Standardmodell“ in der Literatur): 99% Konfidenzintervall



- In der Vergangenheit konnten mehrere signifikante permanente **Änderungen des Sterblichkeitstrends** für viele Länder beobachtet werden
- Modellierung der **Unsicherheit um den aktuellen Trend** ist unzureichend, die **Unsicherheit im zukünftigen Trend** ist entscheidend und wird oft ignoriert.

Einleitung & Motivation

Unser Beitrag: Stochastisches Sterblichkeitsmodell mit zukünftigen Trendänderungen

■ Unsere Beiträge zur aktuar-wissenschaftlichen Literatur

- Wie kann man das Risiko zukünftiger Änderungen des Sterblichkeitstrends in einem stochastischen Sterblichkeitsmodell abbilden?
- Wie unterscheiden sich die Vorhersagen dieses Modells von denen des CBD-„Standardmodells“?
- Wie bestimmt man Mindestkapitalanforderungen für Langlebigkeitsrisiken unter der Berücksichtigung solcher Trendänderungen?
- Wie kann man Langlebigkeitstransfers „marktkonsistent“ bewerten ohne einen liquiden Kapitalmarkt für die Kalibrierung zur Hand zu haben?

■ Unser Modell eignet sich im Praxiseinsatz insbesondere für

- Herleitung von Best-estimate Sterbetafeln („Tafel 2. Ordnung“)
- Herleitung von risiko-adequaten Sicherheitszuschlägen („Tafel 1. Ordnung“)
- Berechnung von Langlebigkeits-SCRs in einem (partiellen) internen Modell
- Mark-to-model Bewertung von Langlebigkeitstransfers (insb. Rückversicherungsinstrumente wie Langlebigkeits-Swaps)

Ein stochastisches Sterblichkeitsmodell mit Trendänderungen

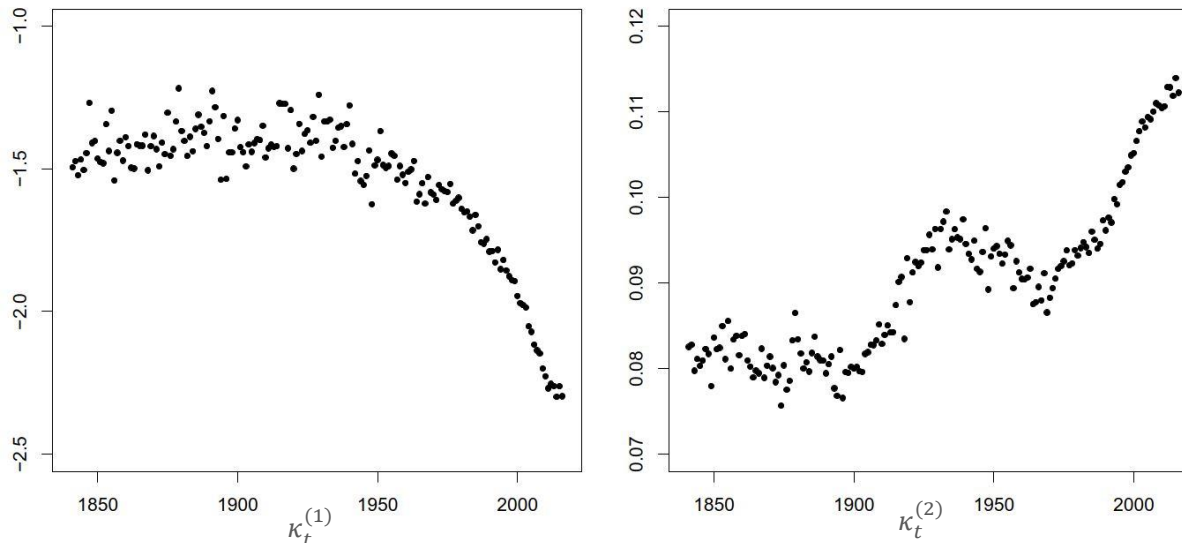
Das Cairns-Blake-Dowd (CBD) Modell

■ Das Modell von Cairns, Blake & Dowd (2006)

$$\text{logit}(q_{x,t}) := \log\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x})$$

- $q_{x,t}$: Wahrscheinlichkeit eines x -jährigen im Jahr t innerhalb eines Jahres zu sterben
- Zwei stochastische Treiber
 - $\kappa_t^{(1)}$: Generelles Sterblichkeitslevel in Jahr t , unabhängig vom Alter x
 - $\kappa_t^{(2)}$: Steigung der Sterblichkeitsgeraden mit zunehmenden Altern x im Logit-Plot
- Standardansatz: Modellierung der Zeitreihen mit Hilfe eines Random Walk mit Drift

Beispielkalibrierung an Daten von England & Wales



Ein stochastisches Sterblichkeitsmodell mit Trendänderungen

Der neue stochastische Trendprozess von Börger & Schupp (2018)

- Modelliere beide Zeitreihen um einen zugrundeliegenden Trendprozess $\bar{k}_t^{(i)}$

$$k_t^{(i)} = \bar{k}_t^{(i)} + \varepsilon_t^{(i)}, \quad i = 1, 2$$

- Stetiger, stückweise linearer Trend für beide Periodeneffekte
- Zusätzliche normalverteilte Fluktuationen $\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma)$ um den Trend

- Den aktuellen Sterblichkeitstrend in Jahr t bezeichnen wir als $AMT_t^{(i)}, i = 1, 2$

- In jedem zukünftigen Jahr erfährt der Trend eine Änderung mit Wahrscheinlichkeit $p^{(i)}$

$$AMT_t^{(i)} = \begin{cases} AMT_{t-1}^{(i)} + M_t^{(i)} S_t^{(i)} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p^{(i)} \\ AMT_{t-1}^{(i)} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p^{(i)} \end{cases}$$

- $M_t^{(i)} \sim LN(\mu^{(i)}, \sigma^{(i)2})$ bezeichnet die absolute Intensität der Trendänderung
- $S_t^{(i)}$ bezeichnet das Vorzeichen der Trendänderung, wobei positive und negative Änderungen als gleich wahrscheinlich angenommen werden

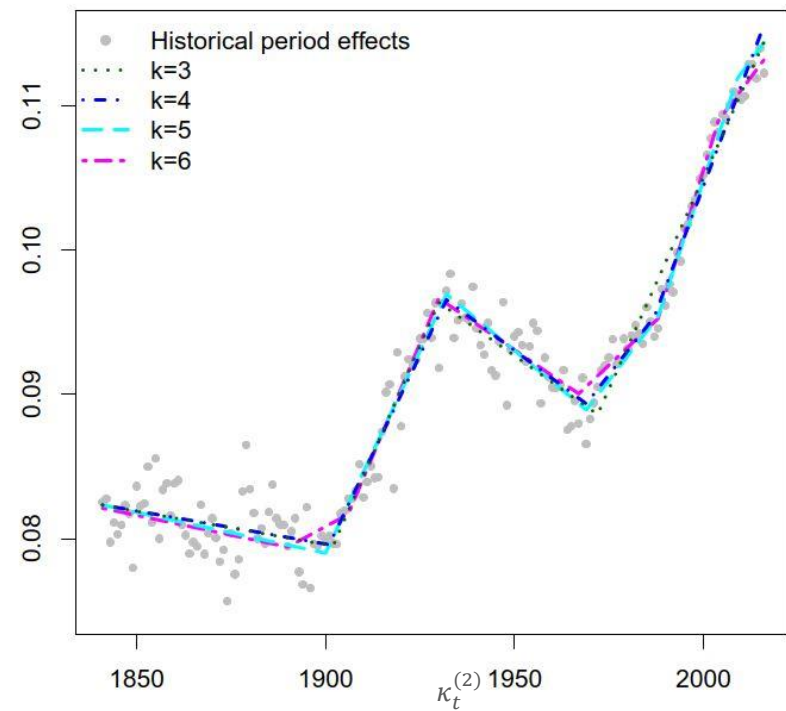
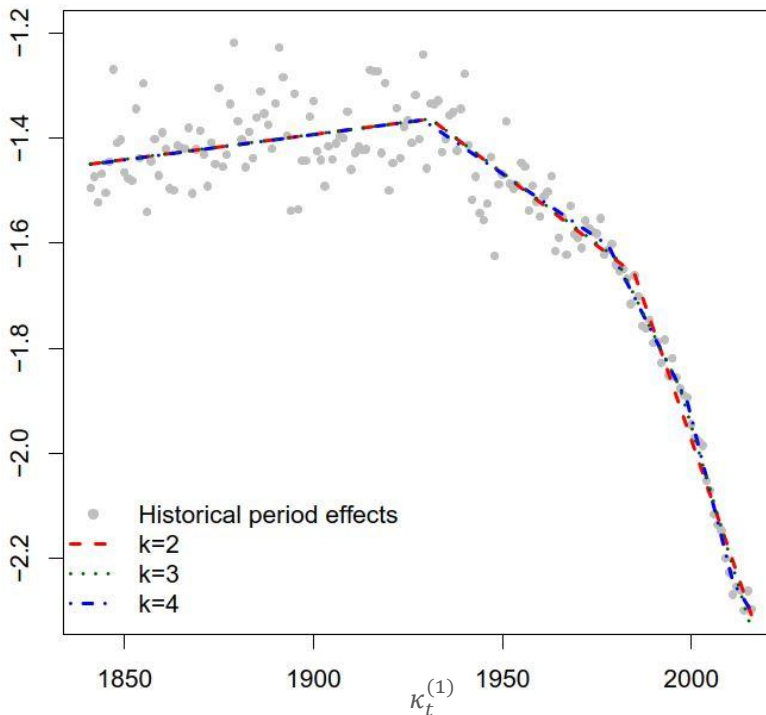
- Der Trendprozess folgt bis zum nächsten Jahr dem (ggfs. geänderten) AMT

$$\bar{k}_{t+1}^{(i)} = \bar{k}_t^{(i)} + AMT_t^{(i)}$$

Ein stochastisches Sterblichkeitsmodell mit Trendänderungen

Modellkalibrierung

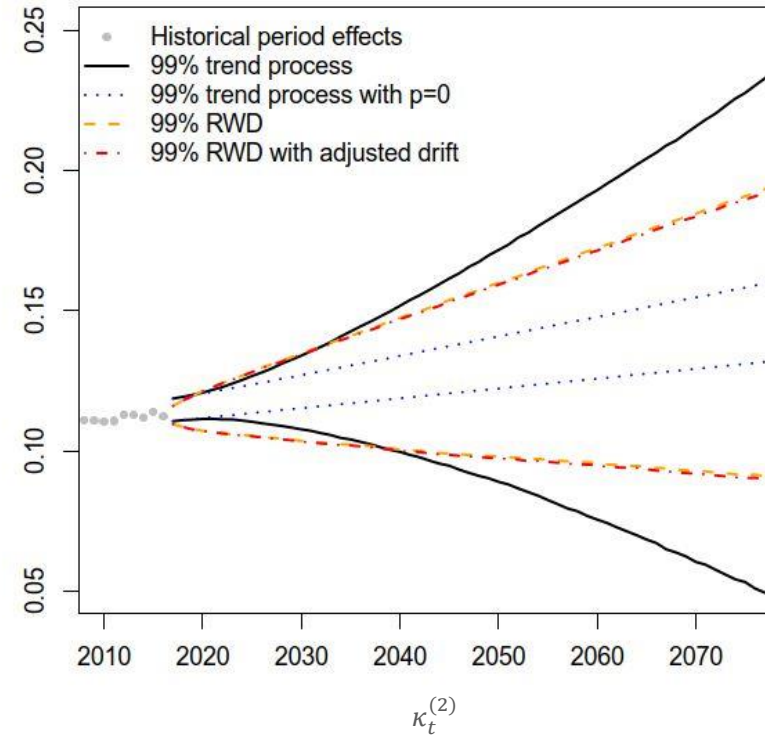
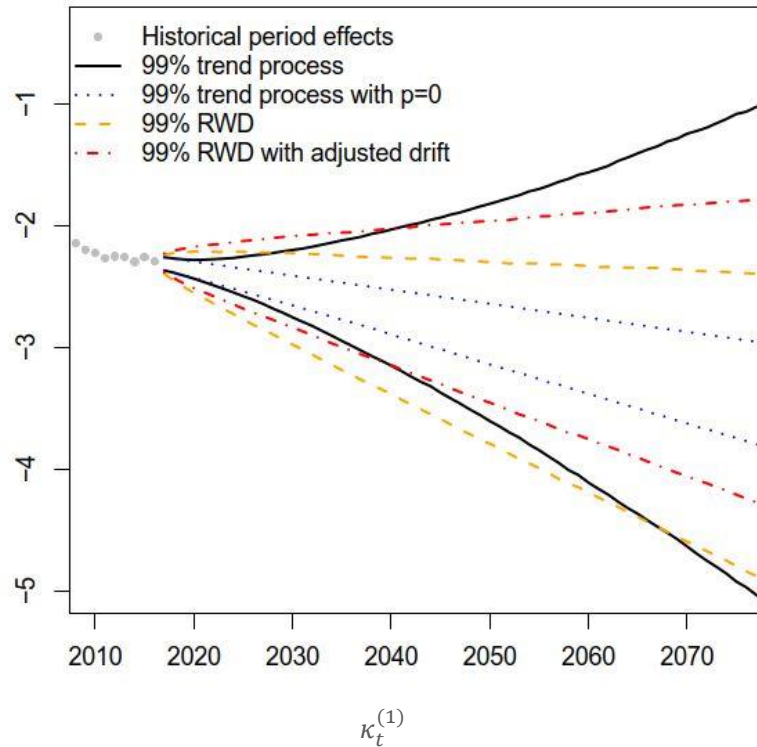
- Kalibrierung des Modells an historische Sterblichkeitsentwicklung mit einem Pseudo-MLE Ansatz (siehe Schupp (2019) für die Details)



- Das Modell **identifiziert mehrere Änderungen des Sterblichkeitstrends** in der Historie und berücksichtigt dieses Risiko in der Projektion
- Dieser Modellierungsansatz lässt sich prinzipiell auch auf andere parametrische Sterblichkeitsmodelle (z.B. Lee-Carter) übertragen

Vergleich mit dem CBD-Standardmodell

99%-Konfidenzintervalle für zukünftige Periodeneffekte



- Das Trendmodell bietet eine signifikant andere Einschätzung des Risikos:
 - Schmalere Konfidenzintervalle auf kurze Sicht
 - Breitere Konfidenzintervalle für längere Projektionszeiträume

Bewertungsansätze im Trendmodell

Risikoadjustiertes Maß

■ Risikoadjustierte Version des Modells

- Grundsätzliche Idee: Risikoaufschlag auf jede Risikokomponente
- Technik: „multivariate normalized exponential tilting“ (Wang (2007), Chen and Cox (2009))

Risikotreiber	Objektive Verteilung(\mathbb{P})	Risikoadjustierte Verteilung(\mathbb{Q})
Eintritt einer Trendänderung	$Bernoulli(p^{(i)})$	$Bernoulli(\Phi(\Phi^{-1}(p^{(i)}) + \lambda))$
Vorzeichen einer Trendänderung	$\mathbb{P}(S_t^{(i)} = -1) = 0.5$	$\mathbb{Q}(S_t^{(i)} = -1) = \Phi(\Phi^{-1}(0.5) + \lambda)$
Größe einer Trendänderung	$LN(\mu^{(i)}, \sigma^{(i)2})$	$LN(\mu^{(i)} + \lambda \sigma^{(i)}, \sigma^{(i)2})$
Fluktuationen um den Trend	$N(0, \Sigma)$	$N(0 - \lambda, \Sigma)$

- Stärkere Gewichtung von Pfaden mit mehr und vor allem stärkeren Trendänderungen unter \mathbb{Q} (verglichen mit \mathbb{P}) impliziert einen adequaten Sicherheitszuschlag für das Trendänderungsrisiko



- Best-estimate Modellierung unter \mathbb{P} , Bewertung von Instrumenten unter \mathbb{Q}
- Der „Marktpreis des Langlebigkeitsrisikos“ $\lambda > 0$ muss kalibriert werden

Bewertungsansätze im Trendmodell

Eigenkapitalkosten-Ansatz

■ Solvency Capital Requirements (SCRs) unter Solvency II

- Entspricht dem 99.5% Quantil der Verteilung der folgenden Zufallsvariable (vgl. Börger (2010)):

$$\frac{BEL(T+1) + CF(T+1)}{1+r} - BEL(T)$$

- **CF**: Cash Flows, die über das Jahr fällig werden (Rentenzahlungen an Versicherte)
- **BEL**: Best estimate liabilities basierend auf den aktuellen Sterblichkeitsannahmen

■ Eigenkapitalkosten und Risikomarge

$$CoC = \sum_{t \geq 0} \frac{r_{CoC} SCR(t)}{(1+r)^{t+1}}$$

- r_{CoC} : Eigenkapitalkostenquote (6% unter Solvency II)
- Der Barwert aller erwarteten Eigenkapitalkosten muss als Risikomarge zusätzlich zu den *BEL* vorgehalten werden



Das Langlebigkeitsrisiko über einen 1-Jahreszeitraum besteht aus 2 Komponenten:

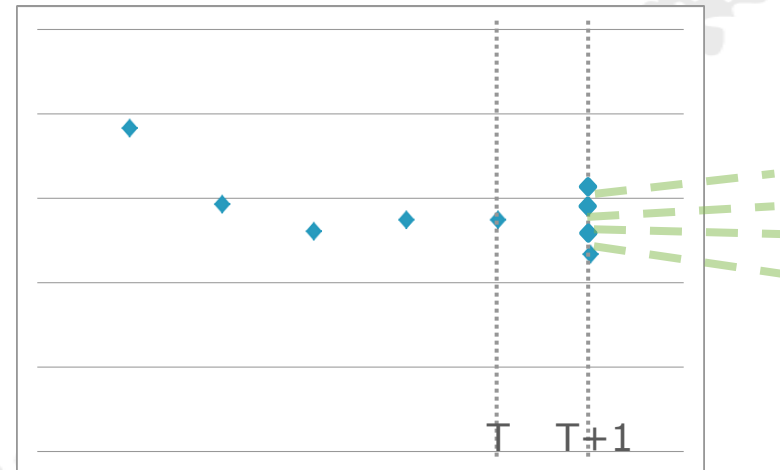
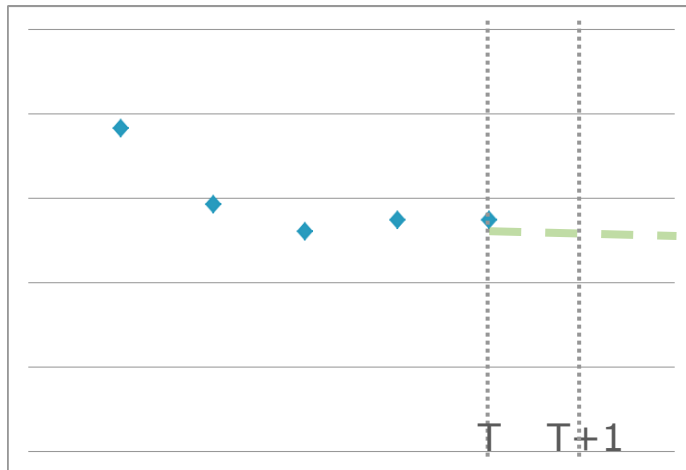
- Mehr Rentner als erwartet überleben das Jahr (**CF(T+1)** steigt)
- Die Sterblichkeitsannahmen verändern sich im Laufe des Jahres in eine ungünstige Richtung im Vergleich zum Vorjahr (**BEL(T+1)** steigt)

Bewertungsansatz im Trendmodell

Eigenkapitalkosten-Ansatz

Veranschaulichung: ein äußerer Modellpfad (vgl. Börger et. al (2021); Freimann (2021)):

$$\frac{BEL(T+1) + CF(T+1) - BEL(T)}{1+r}$$



Eine verschachtelte **Monte-Carlo Simulation** liefert somit

- Pfadabhängige SCRs und damit auch
- Eine **ganze Wahrscheinlichkeitsverteilung** für die Eigenkapitalkosten

Bewertungsansätze im Trendmodell

Diskussion und qualitativer Vergleich

Risikoadjustiertes Maß

- In einem unvollständigen Markt nicht zwingend eindeutig

- Universell anwendbar auf jede Art von Langlebigkeitstransaktion
- Preise werden als Erwartungswert definiert und sind damit linear

- Erfordert Kalibrierung des Marktpreises λ
- Hierfür steht kein liquider Kapitalmarkt als Referenz zur Verfügung

Ökonomische Rechtfertigung

Praktische Anwendbarkeit

Kalibrierung

Eigenkapitalkosten-Anatz

- Hohe praktische Relevanz durch Solvency II

- Erfordert unter Umständen eine rechenzeitintensive verschachtelte Monte-Carlo Simulation

- Erfordert lediglich die Festlegung eines einzelnen Parameters r_{CoC}
- Sinnvoller Startpunkt unter Solvency II $r_{CoC} = 6\%$



- Für ein vollständig kalibriertes Modell muss der Marktpreis des Risikos λ bestimmt werden
- Der Eigenkapitalkostenansatz eignet sich hierfür als sinnvoller Referenzrahmen (vgl. Börger (2010); Levantesi & Menzietti (2017))

Ausgewählte Ergebnisse

Überblick über die Modellparameter

■ Modellkalibrierung

■ Population

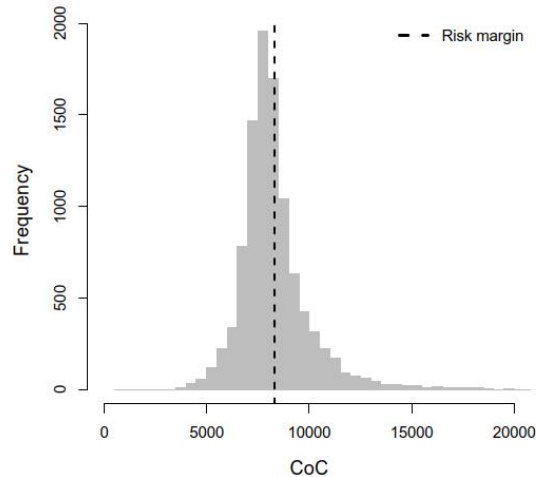
- Männliche Bevölkerung von England & Wales
- Alter 60 bis 109, Jahre 1876 bis 2016
- Daten von der Human Mortality Database (2018)

■ Modellparameter

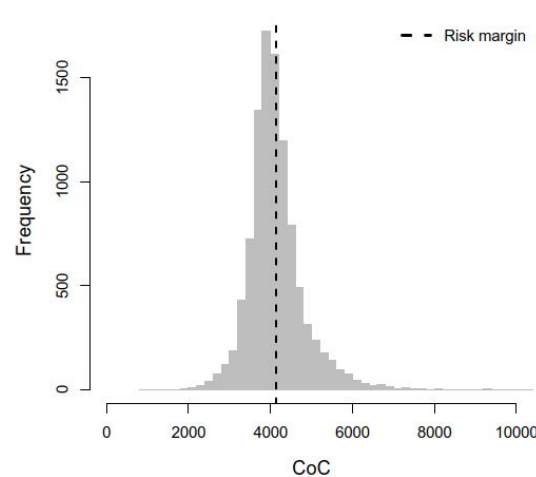
Beschreibung	Parameter
Anfangsalter der Versicherten	$x_0 = \in \{50,65,80\}$
Renteneintrittsalter	$x_R = 65$
Anfängliche Bestandsgröße	10,000
Risikofreier Zins	$r = 2\%$
Eigenkapitalkostensatz	$r_{CoC} = 6\%$
Marktpreis des Langlebighkeitsrisikos	λ (zu bestimmen)

Ausgewählte Ergebnisse

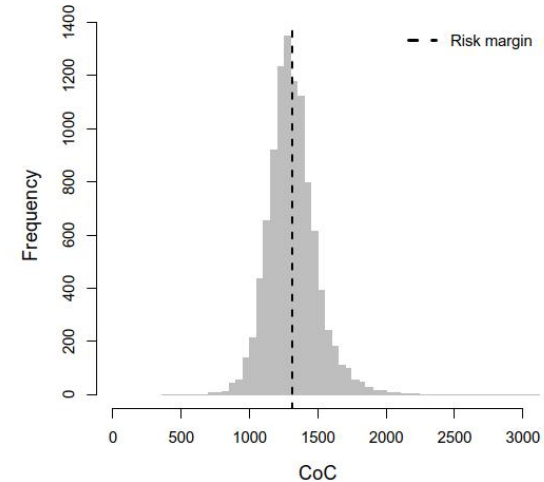
Herleitung der Risikomarge für Langlebigkeitsrisiko und Kalibrierung des „Marktpreises“



(a) $x_0 = 50$



(b) $x_0 = 65$



(c) $x_0 = 80$

	$x_0 = 50$	$x_0 = 65$	$x_0 = 80$
$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(CoC)$	8330	4137	1313
$SD^{\mathbb{P}}(CoC)$	1920	750	197
Corresponding λ	0.316	0.297	0.225



- Modell liefert **Verteilung für den Barwert aller Kapitalkosten**, von der die Risikomarge für Langlebigkeit als Erwartungswert abgeleitet werden kann
- Der „**Marktpreis des Langlebigkeitsrisikos**“ λ kann anschließend an diesen Wert kalibriert werden

Ausgewählte Ergebnisse

Was passiert wenn das Risiko zukünftiger Trendänderungen unzureichend oder gar nicht berücksichtigt wird?

Model	Trend			Trend $p^{(i)[R]} = 0$			RWD		
	50	65	80	50	65	80	50	65	80
Starting age x_0	50	65	80	50	65	80	50	65	80
$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(CoC)$	8330	4137	1313	1764	1030	458	2130	1101	442
$SD^{\mathbb{P}}(CoC)$	1920	750	197	284	174	74	1008	566	229
Corresponding λ	0.316	0.297	0.225	0.205	0.145	0.100	0.057	0.039	0.032

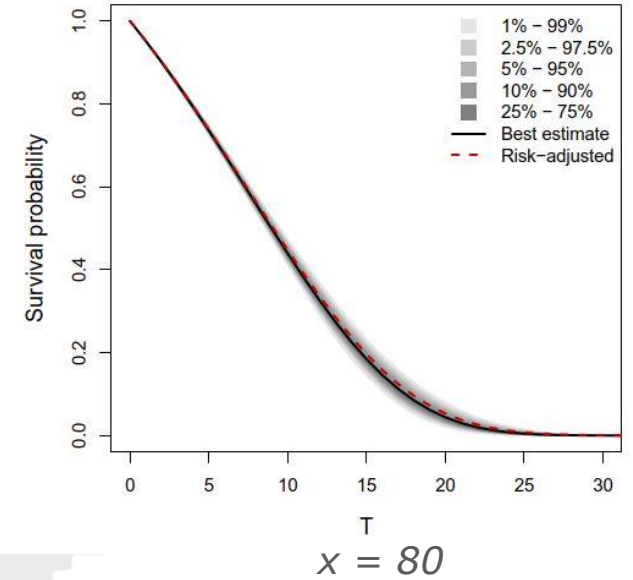
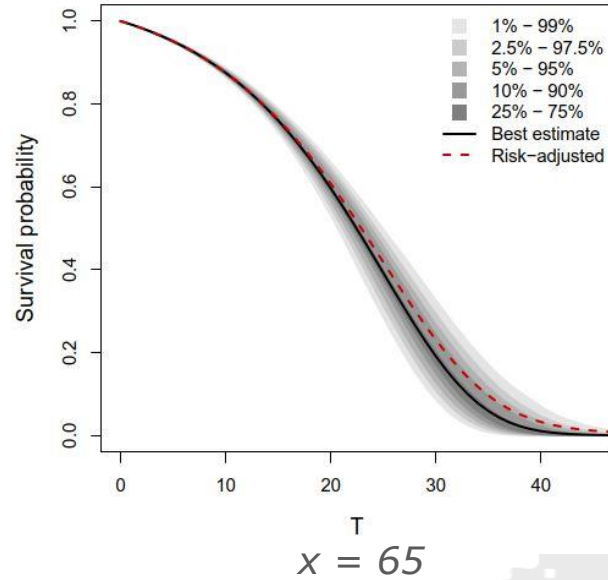
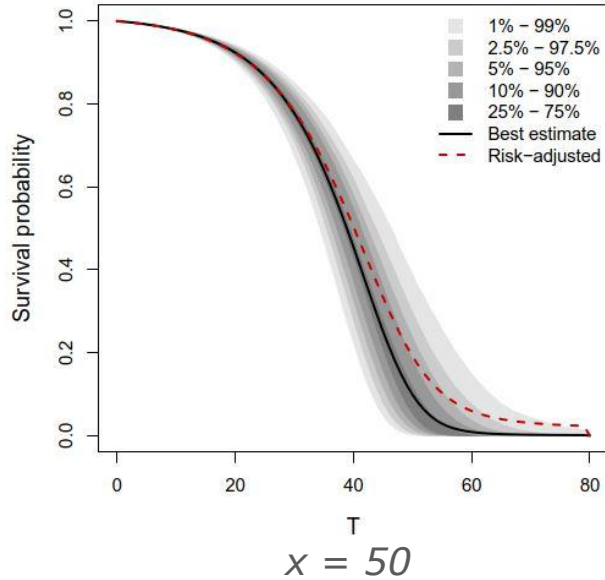
- **Trend**: Neues stochastisches Trendmodell
- **Trend p=0**: Wenn die Trendänderungswahrscheinlichkeiten hart auf 0 gesetzt werden
- **RWD**: Standardansatz basierend auf Random Walk mit Drift



- Wenn das Risiko zukünftiger Trendänderungen nicht modelliert wird, ergeben sich **geringere (und womöglich unzureichende?) Risikomargen**
- Dies führt in der Folge zu **niedrigeren (und womöglich unzureichenden?) Marktpreisen** für Langlebigkeitstransfers

Ausgewählte Ergebnisse

Herleitung von Überlebenswahrscheinlichkeiten 1. und 2. Ordnung



- Die **Unsicherheit** um die Best-estimate Überlebenswahrscheinlichkeiten (Tafel 2. Ordnung) **nimmt mit der Zeit signifikant zu**
- Der implizierte Risikoaufschlag steigt folglich für längere Laufzeiten

Zusammenfassung

Gewonnene Erkenntnisse für die Praxis

- Wenn man das Risiko zukünftiger Trendänderungen unzureichend (oder gar nicht) modelliert, unterschätzt man das Langlebighkeitsrisiko systematisch, insbesondere für längere Zeiträume
 - Börger & Schupp (2018) „Modeling trends in parametric mortality models“ *Insurance: Mathematics & Economics* 78, 369-380
- Dies kann zu unangemessenen oder unzureichenden Mindestkapitalanforderungen, Sicherheitszuschlägen bzw. Preisen für Langlebighkeitstransfers führen
 - Freimann (2021) „Pricing longevity-linked securities in the presence of mortality trend changes“ *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 51(2), 411-447
- Das Risiko zukünftiger Trendänderungen des Sterblichkeitstrends sollte auch bei der Berechnung von Mindestkapitalanforderungen für Langlebighkeitsrisiken adequat berücksichtigt werden
- Zukünftige (pfadabhängige) Kapitalanforderungen für Langlebighkeitsrisiken unterliegen ebenfalls einer signifikanten Unsicherheit (insb. Auswirkungen auf Langlebighkeits-Hedging)
 - Börger, Freimann & Ruß (2021) „A combined analysis of hedge effectiveness and capital efficiency in longevity hedging“ *Insurance: Mathematics and Economics* 99, 309-326



Bei diesen Fragestellungen kann unser stochastisches Trendmodell einen **Mehrwert für Produktentwickler, Risikomanager & Rückversicherer** bieten

Literaturverzeichnis

- Börger, M. (2010). Deterministic shock vs. stochastic value-at-risk - an analysis of the Solvency II standard model approach to longevity risk. *Blätter der DGVFM*, 31(2), 225-259.
- Börger, M. & Schupp, J. (2018). Modeling trend processes in parametric mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 78, 369-380.
- Börger, M., Russ, J. & Schupp, J. (2021). It takes two: why mortality trend modeling is more than modeling one mortality trend. *Insurance: Mathematics & Economics* 99, 222-232.
- Cairns, A.J.G., Blake, D., and Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *The Journal of Risk and Insurance*, 73(4): 687-718
- Chen, H. and Cox, S. H. (2009). Modeling mortality with jumps: Applications to mortality securitization. *The Journal of Risk and Insurance*, 76(3):727-751
- Levantesi, S. and Menzietti, M (2017). Maximum market price of longevity risk under solvency regimes: The case of Solvency II. *Risks*, 5(2), 1-21
- Schupp, J. (2019). *On the modeling of variable mortality trend processes*. Ulm University, Working paper
- Wang, S. (2007). Normalized exponential tilting. *North American Actuarial Journal*, 11(3): 89-99

Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften

Kontaktinformationen

Arne Freimann (M.Sc.)

+49 (731) 20644-253

a.freimann@ifa-ulm.de



What we do

Overview

Life



product development
biometric risks
life settlements/TEPs

Non-Life



product design ▪ pricing
reserving ▪ DFA
risk management

Health



actuarial modeling
claims management
portfolio analyses

Actuarial Consulting

Solvency II ▪ embedded value ▪ asset liability management
ERM ▪ value- and risk-based management ▪ data analytics

project management ▪ market entries ▪ inforce management ▪ strategic consulting

Actuarial Services

large-scale actuarial projects ▪ actuarial tests
support in case of capacity constraints

Research



Education



... further information is
available on our website
www.ifa-ulm.de

Disclaimer

Please consider the following reliances and limitations:

- This document must be considered in its entirety as individual sections, if considered in isolation, may be misleading. No reliance should be placed on any advice not given in writing. Draft versions of this document must not be relied upon by any person for any purpose. All decisions taking into account this document must consider the agreed basis and the specific purposes of this document. If reliance is placed contrary to the guidelines set out above, we disclaim any and all liability which may arise.
- This document is based on our market analyses and views as well as on information which we received from you. We have checked this information for consistency against our market knowledge and experience. But we have not undertaken any independent verification regarding completeness or correctness of this information. Statistical market data as well as information where the source of the information is indicated are in general not checked by us. Please also note that this document was based on data available to us at, or prior to the date it was prepared. It takes no account of developments after that date and we are under no obligation to update or correct inaccuracies which may become apparent in the document. In particular, this holds for possible implications arising from the introduction of new regulatory requirements.
- This document is based on our experience as actuarial advisers. Where, in the course of providing our services, we need to interpret a document, deed, accounts or relevant taxation provision or medical issues in order to advise you, we will do so with the reasonable skill and care to be expected of us in our professional capacity. Should you want definitive advice, for example as to the proper interpretation of a document, deed, accounts, relevant taxation provision or medical issues, you should consult your lawyers, accountants, tax advisers or medical experts for that advice.
- As agreed, this document was made available for internal use only. Except with our written consent, this document must not be reproduced, distributed or communicated in whole or in part to any third party. We disclaim all liability for consequences arising from any third party relying on our reports, advice, opinions, documents or other information.
- Any reference to ifa in context with this document in any report, accounts, other published documents, or oral form is not authorised without our prior written consent. This holds similarly for any oral information or advice provided by us in the context of presenting/discussing this document.